Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2003*

   Betrachten Sie die reelle 3×3–Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Berechnen Sie die Determinante von B.

   b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

   c) Ermitteln Sie alle Eigenräume von B, indem Sie für jeden Eigenraum eine Basis angeben.

   d) Entscheiden Sie, ob B diagonalisierbar ist.

Lösung:

   a) Mit Hilfe der Regel von Sarrus ergibt sich

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \big(-4-6-2\big) - \big(-4-4-3\big) = -1.$$

   b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) \quad &= \quad \det(B - \lambda\, E_3) \ = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{I}-\text{II}}{\underset{\text{III}-\text{II}}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{(\lambda-1)\text{ aus I}}{\underset{(\lambda+1)\text{ aus III}}{=}} (\lambda-1)\cdot(\lambda+1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Regel von}}{\underset{\text{Sarrus}}{=}} (\lambda-1)\cdot(\lambda+1)\cdot\Big[(-2-\lambda) - \big((-2)+(-1)\big)\Big] \\
&= -(\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1);
\end{aligned}$$

wegen

$$\chi_B(\lambda) = 0 \iff -(\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1) = 0 \iff \big(\lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -1\big)$$

besitzt die Matrix B genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

c) Wegen

$$B - \lambda_1\, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{II}\leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(B;\lambda_1)$ der Matrix B zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$B - \lambda_2\, E_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-3\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(B;\lambda_2)$ der Matrix B zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

d) Gemäß b) besitzt die Matrix B nur zwei Eigenwerte, und gemäß c) ist jeder der beiden Eigenräume von B eindimensional; damit gibt es höchstens zwei linear unabhängige Eigenvektoren von B, insbesondere also keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von B, so daß die Matrix B nicht diagonalisierbar ist.

Alternativ läßt sich auch unter Verwendung des Hauptsatzes über diagonalisierbare Matrizen wie folgt argumentieren: Da $\lambda_1 = 1$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_B(\lambda)$ ist, ergibt sich für den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ die algebraische Vielfachheit $\alpha_1 = 2$, und wegen $\mathrm{Rang}(B - \lambda_1 E_3) = 2$ ist die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 3-2 = 1$; wegen $\gamma_1 < \alpha_1$ ist die Matrix B nicht diagonalisierbar.

2. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2004*

Gegeben sei die reelle 3×3–Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

b) Entscheiden Sie, ob M ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Lösung:

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=}$$
$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \big[(1-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 1\cdot(-1)\big] =$$
$$= (2-\lambda)\cdot\big(3 - 4\,\lambda + \lambda^2 + 1\big) = (2-\lambda)\cdot\big(4 - 4\,\lambda + \lambda^2\big) = (2-\lambda)^3;$$

wegen

$$\chi_M(\lambda) = 0 \iff (2-\lambda)^3 = 0 \iff \lambda = 2$$

ist $\lambda = 2$ der einzige Eigenwert der Matrix M. Wegen

$$M - \lambda\, E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M;\lambda)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda = 2$; die Eigenvektoren sind damit alle vom Nullvektor verschiedenen Linearkombinationen von v_1 und v_2, also alle Vektoren

$$v = \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad (\mu_1, \mu_2) \neq (0,0).$$

b) Gemäß a) sind höchstens zwei Eigenvektoren der Matrix M linear unabhängig; damit existiert keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von M, und folglich ist die Matrix M nicht diagonalisierbar, also nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

Alternativ läßt sich auch unter Verwendung des Hauptsatzes über diagonalisierbare Matrizen wie folgt argumentieren: Da $\lambda = 2$ eine dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_M(\lambda)$ ist, ergibt sich für den Eigenwert $\lambda = 2$ die algebraische Vielfachheit $\alpha = 3$, und wegen $\mathrm{Rang}(M - \lambda\, E_3) = 1$ ist die geometrische Vielfachheit $\gamma = 3 - 1 = 2$; wegen $\gamma < \alpha$ ist die Matrix M nicht diagonalisierbar, also nicht ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

3. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & 2 & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?
Hinweis:
Wenden Sie Satz 8.16 an. Beachten Sie, dass die Diagonalisierung der Matrix A_a (sofern diese möglich ist) nicht explizit verlangt ist.
Lösung:
Das charakeristische Polynom $\chi_{A_1}(\lambda) = \det(A_a - \lambda E_3)$ ist gegeben durch

$$\chi_{A_a}(\lambda) = (-3-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)$$

Somit ergibt sich der Eigenwert $\lambda_1 = -3$ mit algebraischer Vielfachheit $\alpha_1 = 1$, sowie der Eigenwert $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $\alpha_2 = 2$. Gemäß Satz 8.13 gilt

$$\gamma_1 = \dim \operatorname{Eig}(A_a, \lambda_1) = \dim \operatorname{Kern}(l_{A_a - \lambda_1 E_3}) = 1$$

In Abhängigkeit von a berechnen wir

$$\gamma_2 = \dim \operatorname{Eig}(A_a, \lambda_2) = \dim \operatorname{Kern}(l_{A_a - \lambda_2 E_3})$$

Im Falle $\gamma_2 = 2 = \alpha_2$ ist die Matrix A_a diagonalisierbar, im Falle $\gamma_2 = 1 < \alpha_2$ ist die Matrix A_a nicht diagonalisierbar.
Es ist

$$A_a - 2E_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Falle $a = 0$ hat diese Matrix den Rang 1. Damit ist dim $\dim \operatorname{Kern}(l_{A_0 - \lambda_2 E_3}) = 2$ und somit ist im Falle $a = 0$ die Matrix $A_{a=0}$ diagonalisierbar.
Im Falle $a \neq 0$ hat die Matrix $A_a - 2E_3$ den Rang 2. Damit ist $\dim \operatorname{Kern}(l_{A_a - \lambda_2 E_3}) = 1$ und somit ist im Falle $a \neq 0$ die Matrix A_a nicht diagonalisierbar.

4.

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Zeigen Sie, dass auch alle Potenzen A^t für $t \in \mathbb{N}$ diagonalisierbar sind.
Hinweis:
Falls $A \sim D$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, so sollte ebenfalls $A^t \sim D^t$ gelten. Zeigen Sie die Äquivalenz $A^t \sim D^t$ unter Verwendung von Definition 8.14.

b) Finden Sie ein Beispiel für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass A^2 diagonalisierbar ist, aber A selber nicht diagonalisierbar ist.
Lösung:

a) Gemäß der Aufgabenstellung ist die Matrix A diagonalisierbar, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix P, sowie eine Diagonalmatrix D mit

$$P^{-1}AP = D$$

Wir zeigen, dass

$$P^{-1}A^tP = D^t$$

für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt. Hierfür fügen wir die Einheitsmatrix $E_n = PP^{-1}$ zwischen die Matrixprodukte ein und verwenden das Assoziativgesetz für Matrizenmultiplikationen:

$$
\begin{aligned}
P^{-1}A^tP =& P^{-1}\underbrace{AA...A}_{t \text{ mal}}P = P^{-1}AE_nAE_nA...E_nAP \\
=& P^{-1}A(PP^{-1})A...(PP^{-1})AP \\
=& (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)...(P^{-1}AP) = \underbrace{DD...D}_{t \text{ mal}} = D^t
\end{aligned}
$$

b) Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2$$

Somit besitzt A den Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit $\alpha_1 = 2$. Weiterhin ist

$$\gamma_1 = \dim \operatorname{Kern}(A - 0E_2) = \dim \operatorname{Kern}(A) = \dim \left(\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1$$

damit ist A nicht diagonalisierbar.
Weiterhin ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Nullmatrix ist eine Diagonalmatrix, daher ist A^2 diagonalisierbar.