MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 4
08.05.2015

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009* 2.1

   Gegeben sei die reelle 3×3–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Zeigen Sie, dass $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum.

   b) Zeigen Sie, dass $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

   Hinweis:
   Verwenden Sie bei Teilaufgabe a) Satz 8.4. Die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren wird in den nächsten Wochen Hauptbestandteil der Vorlesung sein, daher sollten Sie sich vergewissern, dass Sie diese Methode beherrschen.

   Lösung:

   a) Es ist

$$A - \lambda \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{II}+2\cdot\text{I}}{\underset{\text{III}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   also

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda \cdot E_3) = 1 < 3;$$

   damit ist $\det(A - \lambda \cdot E_3) = 0$ und somit ist $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A. Alternativ kann $\lambda = 3$ in das charakteristischen Polynom eingesetzt werden; es ergibt sich $\chi(3) = 0$.
   Für den Eigenraum ergibt sich

$$\operatorname{Eig}(A;\lambda) = \mathbb{R}\cdot u_1 + \mathbb{R}\cdot u_2 \qquad \text{mit} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist $x \neq 0$ mit

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

damit ist $x \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu = 7$.

2. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Berechnen Sie eine mögliche Matrix A!
Hinweis:
Benutzen Sie die beiden Eigenwertgleichungen $Av_{1/2} = \lambda_{1/2} v_{1/2}$ um die vier unbekannten Einträge der Matrix A zu berechnen.
Bemerkung: Mit Hilfe dieser Methode kann eine Matrix A konstruiert werden, dessen Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt sind. Dies ist natürlich für die Erstellung von Aufgaben hilfreich und wird daher oft verwendet.

Lösung:
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt genau dann die (vom Nullvektor verschiedenen) Vektoren v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^2$ als Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, wenn

$$A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1, \qquad A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2,$$

zusammengefaßt

$$A \cdot (v_1, v_2) = (A \cdot v_1, A \cdot v_2) = (\lambda_1 \cdot v_1, \lambda_2 \cdot v_2),$$

also

$$(*) \qquad A \cdot B = C$$

mit $B = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $C = (\lambda_1 \cdot v_1, \lambda_2 \cdot v_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, gilt; für die hier gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und Zahlen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ ergibt sich also

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist die Matrix $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ invertierbar. Folglich erhält man

$$(*) \qquad A \cdot B = C \iff A = C \cdot B^{-1},$$

also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. *nach Staatsexamensaufgabe Herbst 2012*

Es sei V der Vektorraum der reellen 3×3 Matrizen. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie A^{2012}.
Hinweis:
Berechnen Sie A^2 und A^3 und überlegen Sie sich, wie Sie mit Hilfe dieser Ergebnisse A^{2012} effizient berechnen können.

b) Berechnen Sie auch A^{2015}.

c) Zeigen Sie ohne Verwendung des charakteristischen Polynoms, dass die möglichen Eigenwerte von A nur den Wert 1 annehmen können.
Hinweis: In dem letzten Tutoriumsblatt haben Sie gezeigt, dass die lineare Abbildung π nur die Eigenwerte 0 oder 1 besitzen kann. Wiederholen Sie den Beweis und überlgen Sie sich, wie Sie einen ähnlichen Beweis führen können.

d) Zeigen Sie, dass die Matrizen A und $A - A^2$ jeweils nur einen reellen Eigenwert haben und zeigen Sie ferner, dass die dazugehörenden Eigenvektoren übereinstimmen.
Hinweis: Verwenden Sie wieder Satz 8.4.

Lösung:

a) Für die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

und damit

$$A^{2012} = A^{3\cdot 670+2} = \left(A^3\right)^{670} \cdot A^2 = {E_3}^{670} \cdot A^2 = E_3 \cdot A^2 = A^2.$$

b) Analog ergibt sich

$$A^{2015} = A^3 A^{2012} = E_3 A^{2012} = A^{2012} = A^2.$$

c) Sei $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann gilt

$$v = E_3 v = A^3 v = \lambda^3 v$$

Damit ist $\lambda^3 = 1$ und somit gilt $\lambda = 1$.

d) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (-\lambda)^3 + 1^3 = -\lambda^3 + 1$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, damit wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff -\lambda^3 + 1 = 0 \iff \lambda^3 = 1 \iff \lambda = 1$$

den einzigen reellen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ (wie schon in Teilaufgabe c) gezeigt!), und wegen

$$A - \lambda_1\, E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1)$. Ferner besitzt die Matrix

$$A' = A - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

das charakteristische Polynom

$$\chi_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$
$$= \left((-\lambda)^3 + 1^3 + (-1)^3\right) - (\lambda + \lambda + \lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 + 3\right)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, damit wegen

$$\chi_{A'}(\lambda) = 0 \iff -\lambda\left(\lambda^2 + 3\right) = 0 \underset{\lambda^2+3>0}{\iff} \lambda = 0$$

den einzigen reellen Eigenwert $\lambda_2 = 0$, und wegen

$$A' - \lambda_2\, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\overset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A'; \lambda_2)$. Damit besitzen die beiden Matrizen A und A' jeweils nur einen reellen Eigenwert, und die beiden jeweils eindimensionalen Eigenräume stimmen zudem überein.

4. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2002*

   a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   b) Zeigen Sie, dass die Matrix den Eigenwert 3 besitzt.
   Bermerkung:
   Der Aufgabensteller ist hier gnädig mit den Studenten, die das charakteristische Polynom einfach ausmultipliziert haben. Die Angabe eines Eigenwertes erlaubt es, die erste Nullstelle zu faktorisieren.

   c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Matrix A.

Lösung:

   a) Für das charakteristische Polynom χ_A von A ergibt sich für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{(I+II)+III}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{(3-\lambda)\text{ aus I}}{=} (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$-(\lambda - 3) \cdot \left[\big((2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0\big) - \big(2\,(2-\lambda) + 0 + (1-\lambda)\big)\right] =$$

$$-(\lambda - 3) \cdot \big(\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 - 4 + 2\,\lambda - 1 + \lambda\big) = -(\lambda - 3)\,(\lambda^2 - 3).$$

   b) Die Eigenwerte der Matrix A entsprechen genau den Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A; wegen

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda = 3 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = 3 \quad \text{oder} \quad \lambda = \sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \lambda = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

   besitzt A genau die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{3}$.

   c) Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\cdot\text{II}}{\overset{\text{I}+3\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\cdot\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\overset{\text{III}+\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ mit dem Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1) = \mathbb{R} \cdot v_1$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \overset{(2+\sqrt{3})\cdot\mathrm{II}}{\underset{(1+\sqrt{3})\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2+\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2+2\sqrt{3} & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+\sqrt{3}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = \sqrt{3}$ mit dem Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;\lambda_2) = \mathbb{R} \cdot v_2$.

Den Eigenvektor zum Eigenwert λ_3 erhalten wir mit Hilfe von

$$A - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 2 \\ 1 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \overset{(2-\sqrt{3})\cdot\mathrm{II}}{\underset{(1-\sqrt{3})\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2-\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 2-2\sqrt{3} & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}-\sqrt{3}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit kann

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}-2 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gewählt werden kann und sich der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;\lambda_3) = \mathbb{R} \cdot v_3$ ergibt.