MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 3
01.05.2015

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad p(x) \mapsto x\alpha\, p'(x) + 2p(x)$$

a) Man zeige, daß die Abbildung für jedes feste $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Endomorphismus von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ ist.

b) Man bestimme die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis $1, x, x^2$.

c) Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die f ein Automorphismus ist und gebe in den anderen Fällen jeweils eine Basis von $Kern(f)$ an.

Hinweis: Zur Wiederholung: Ein Endomorphismus ist eine lineare Abbildung $f : V \to V$, d.h. ein Vektor $v \in V$ wird unter der linearen Abbildung f wieder nach V abgebildet. Ein Automorphismus ist ein bijektiver Endomorphismus. Überlegen Sie sich, was bei Teilaufgabe a) und c) zu zeigen ist.

Lösung:

a) Für jedes $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ mit $p' = a_1 + 2a_2x$ ist

$$\begin{aligned} f(p) &= x\alpha\, p' + 2p \\ &= x\alpha\,(a_1 + 2a_2x) + 2\left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right) \\ &= 2a_0 + (2a_1 + \alpha a_1)\, x + (2a_2 + 2\alpha a_2)\, x^2 \end{aligned}$$

mit $f(p) \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$; des weiteren gilt

$$\begin{aligned} f(p_1 + p_2) &= x\alpha\,(p_1 + p_2)' + 2\,(p_1 + p_2) = \\ &= x\alpha\,(p_1' + p_2') + 2\,(p_1 + p_2) = (x\alpha p_1' + x\alpha p_2') + (2p_1 + 2p_2) = \\ &= (x\alpha p_1' + 2p_1) + (x\alpha p_2' + 2p_2) = f(p_1) + f(p_2), \end{aligned}$$

für alle p_1, $p_2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$, weswegen f additiv ist, sowie

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot p) &= x\alpha\,(\lambda \cdot p)' + 2\,(\lambda \cdot p) = x\alpha\,(\lambda \cdot p') + 2\,(\lambda \cdot p) = \\ &= \lambda \cdot (x\alpha p') + \lambda \cdot (2p) = \lambda \cdot (x\alpha p' + 2p) = \lambda \cdot f(p), \end{aligned}$$

für alle $p \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, weswegen f homogen ist. Folglich ist f insgesamt ein Endomorphismus von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

b) Wir bestimmen die darstellende Matrix M der linearen Abbildung f bezüglich der Standardbasis 1, x, x^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$; wegen

$$\begin{array}{ccccccc} f(1) & \underset{a_0=1,a_1=0,a_2=0}{=} & 2 & = & 2\cdot 1+ & 0\cdot x+ & 0\cdot x^2 \\ f(x) & \underset{a_0=0,a_1=1,a_2=0}{=} & (2+\alpha)x & = & 0\cdot 1+ & (2+\alpha)\cdot x+ & 0\cdot x^2 \\ f(x^2) & \underset{a_0=0,a_1=0,a_2=1}{=} & (2+2\alpha)x^2 & = & 0\cdot 1+ & 0\cdot x+ & (2+2\alpha)\cdot x^2 \end{array}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

c) Der Endomorphismus f ist nun genau dann bijektiv, also ein Automorphismus, wenn die darstellende Matrix M invertierbar ist, also $\det(M) \neq 0$ gilt; wegen

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\alpha \end{vmatrix} \overset{\text{Diagonal--}}{\underset{\text{matrix}}{=}} 2\,(2+\alpha)\,(2+2\alpha)$$

ist dies genau für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ der Fall.

- Für $\alpha = -1$ gilt:
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Somit ist $\mathrm{Rang}(M) = 2$ und damit
$$\dim \mathrm{Kern}(f) = \dim \mathrm{Kern}(\ell_M) \quad = \quad 3 - \mathrm{Rang}(M) = 3 - 2 = 1$$
Es ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\ell_M)$, also ist $0\cdot 1 + 0\cdot X + 1\cdot X^2 = X^2$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ mit $\alpha = -1$.
- Für $\alpha = -2$ gilt:
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Somit ist $\mathrm{Rang}(M) = 2$ und damit
$$\dim \mathrm{Kern}(f) = \dim \mathrm{Kern}(\ell_M) \quad = \quad 3 - \mathrm{Rang}(M) = 3 - 2 = 1$$
Es ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(\ell_M)$, also ist $0\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2 = X$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ mit $\alpha = -2$.

2. Betrachten Sie noch einmal den auf dem 2. Tutoriumsblatt angegebenen Endomorphismus

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\,x - y - z \\ x - z \\ x - y \end{pmatrix}.$$

   a) Geben Sie die Abbildungsmatrix A der linearen Abbildung π bezüglich der kanonischen Basis an.

   b) Zeigen Sie unter Verwendung der bereits gezeigten Eigenschaft $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}^3$, dass die Eigenwerte von A nur die Werte 0 oder 1 annehmen können.

   c) Berechnen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$.
   Hinweis: Wiederholen Sie die Definition von $\mathrm{Eig}(A, \lambda = 0)$. Kennen Sie diese Menge aus einem anderen Kontext?

   d) Zeigen Sie, dass

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ sind.

Lösung:

a) Die Abbildungsmatrix A ist die eindeutig bestimmte Matrix, so dass

$$\pi(x) = Ax$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt. Mit Hilfe der angegeben Abbildungsvorschrift ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A mit Eigemvektor $v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$. Da $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt, folgt weiterhin, dass $A^2 = A$ gilt. Somit ist

$$\lambda v = Av = A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda A v = \lambda^2 v$$

Da $v \neq 0$ ist, muss $\lambda^2 = \lambda$ gelten. Daraus folgt aber, dass $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ gelten muss.

c) Wir betrachten

$$\mathrm{Eig}(A, 0) = \{x \in R^3 | Ax = 0x\} = \{x \in R^3 | Ax = 0\} = \mathrm{Kern}(l_A) = \mathrm{Kern}(\pi)$$

$\mathrm{Kern}(l_A)$ ist gegeben durch (Gauß-Algorithmus)

$$\mathrm{Kern}(l_A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Diese Aufgabe kann durch explizites Nachrechnen gelöst werden, es gilt

$$Av_1 = v_1 \;, Av_2 = v_2$$

3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A\,x$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Gegeben seien weiterhin die drei Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix B von f bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3.
Lösung:
Für die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist die zugehörige lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, zu betrachten. Ferner ist für die drei gegebenen Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

die Hilfsmatrix $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß

$$\begin{aligned}
(B \mid E_3) \quad &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III+I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\text{III}-\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \\
&\underset{\text{I}-\text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad = \quad (E_3 \mid B^{-1})
\end{aligned}$$

invertierbar; insbesondere ist b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Die Aufgabe kann nun auf zwei verschiedene Arten gelöst werden.

- Die darstellende Matrix B' bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 ist gegeben durch

$$A' = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

- Wegen

$$f(b_1) = A \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$$

$$f(b_2) = A \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3$$

$$f(b_3) = A \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 4 \cdot b_3$$

  ergibt sich die darstellende Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

  von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ (vergleiche auch Definition 7.23).

4. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

   Lösung:

   a) Die Eigenwerte der gegebenen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   stimmen mit den Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms überein; für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Spalten}}{\underset{\text{I + III, II−III}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -2+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Zeilen}}{\underset{\text{III−I}}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -2+\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Zeilen}}{\underset{\text{III+II}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)$$

mit
$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \big(\lambda = 1 \ \text{ oder } \ \lambda = 2\big),$$
so daß die Matrix A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ besitzt.

Alternativ kann die Determinante ohne Umformungen ausgerechnet werden, es ergibt sich
$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$
Durch systematisches Raten ergibt sich (z.B.) $\lambda_1 = 1$ und die Faktorisierung
$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 3\lambda - 2)$$
Daraus ergeben sich die gleichen Nullstellen wie oben.