MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 13
17.07.2015

Lösung zum 13. Tutorium

1. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2013*

   a) Zeien Sie, dass es genau eine bijektive affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

   $$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

   gibt.

   b) Zeigen Sie, dass f sogar eine Bewegung (d.h. abstandserhaltend) ist und bestimmen Sie den Typ dieser Bewegung.

Lösung:

a) Im euklidischen $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte

$$a_0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

sowie

$$b_0 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

zu betrachten. Da

$$u_1 = a_1 - a_0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = a_2 - a_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, bilden die Punkte a_0, a_1, a_2 ein Dreieck, also ein affines Koordinatensystem von $\mathbb{R}^2$; damit existiert aber nach dem Prinzip der affinen Fortsetzung genau eine affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(a_0) = b_0, \quad f(a_1) = b_1 \;\text{ und }\; f(a_2) = b_2.$$

Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = A \cdot x + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt damit

$$A \cdot a_0 + b = b_0, \quad A \cdot a_1 + b = b_1 \quad \text{und} \quad A \cdot a_2 + b = b_2;$$

wegen $a_0 = 0$ ist zunächst

$$b = b_0 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

und wegen $a_1 = e_1$ und $a_2 = e_2$ folgt dann

$$\begin{aligned} A \cdot e_1 = A \cdot a_1 = b_1 - b &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A \cdot e_2 = A \cdot a_2 = b_2 - b &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

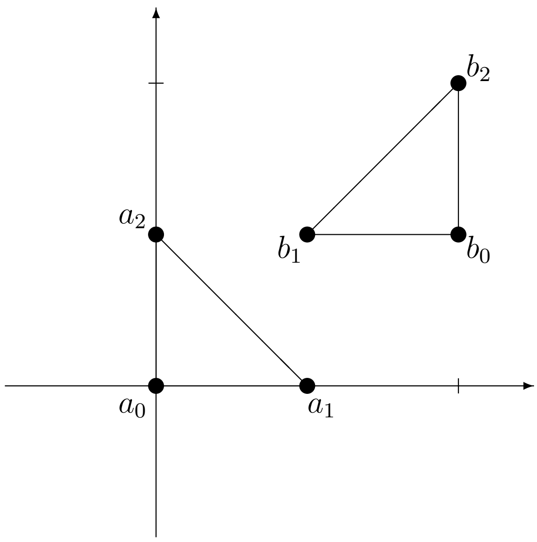
$$A = A \cdot E_2 = A \cdot (e_1, e_2) = (A \cdot e_1, A \cdot e_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

ist die Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ invertierbar, und damit ist die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijektiv.

b) Wir betrachten die Lage der beiden Dreiecke mit den Eckpunkten a_0, a_1, a_2 sowie b_0, b_1, b_2 in der Ebene:



Wir betrachten

- die Achsenspiegelung $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Achse $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
- die Parallelverschiebung $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

damit ist $p \circ s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Gleitspiegelung mit der Spiegelachse a und dem dazu parallelen Schubvektor v. Wegen

$$\begin{aligned}
(p \circ s)(a_0) = p\left(s\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) &= p\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = b_0\\
(p \circ s)(a_1) = p\left(s\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) &= p\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = b_1\\
(p \circ s)(a_2) = p\left(s\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) &= p\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = b_2
\end{aligned}$$

stimmen die beiden affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $p \circ s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf dem Dreieck a_0, a_1, a_2 von $\mathbb{R}^2$ überein, und nach dem Prinzip der affinen Fortsetzung folgt $f = p \circ s$; damit ist f die oben beschriebene Gleitspiegelung, insbesondere also eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$.
Zu diesem Ergebnis kann man auch rein rechnerisch gelangen: Wegen

$$A^\top \cdot A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = E_2$$

ist die Matrix $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ von a) sogar orthogonal, und damit ist die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung. Wegen $\det(A) = -1$ gemäß a) ist A genauer eine Spiegelungsmatrix, und damit beschreibt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Gleitspiegelung in $\mathbb{R}^2$.
Bemerkung:
Im Folgenden wird der Schubvektor und die Spiegelachse bestimmt. Dies war jedoch nicht in der Aufgabenstellung verlangt. Zur Lösung der Aufgabe reicht es also aus, zu zeigen, dass A eine Spiegelmatrix darstellt.

sei $a = t + \mathbb{R} \cdot u$ die Spiegelachse sowie $v = \alpha \cdot u$ der Schubvektor von f. Wegen

$$A \cdot e_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot e_2$$

ist e_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 1$, und wir können

$$u = e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad u^\perp = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

wählen. Wir zerlegen

$$b = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (-2) \cdot u^\perp + 1 \cdot u;$$

damit ist $v = 1 \cdot u$, und wegen

$$\left(E_2 - A \mid (-2) \cdot u^\perp\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \qquad \text{kann} \qquad t = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

gewählt werden; damit ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= A \cdot x + b = A \cdot x + \left((-2) \cdot u^\perp + 1 \cdot u\right) =\\
&= A \cdot x + (E_2 - A) \cdot t + u = \underbrace{S \cdot (x - t) + t}_{\text{Achsenspiegelung an } a} + \underbrace{u}_{\text{Verschiebung um } v}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

2. *nach Staatsexamensaufgabe Herbst 2012* Bestimmen Sie alle affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f((1,0)) = (2,3)$ und $f((0,1)) = (-2,-2)$. Gibt es unter all diesen affinen Abbildungen eine Bewegung (d.h. eine Isometrie)?

   Lösung:

   Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch die Abbildungsvorschrift der Form $f(x) = A \cdot x + b$ mit einer Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ charakterisiert; es sei

   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

   Dabei gilt zum einen

   $$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff$$
   $$\iff \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - b_1 \\ 3 - b_2 \end{pmatrix}$$

   und zum anderen

   $$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$
   $$\iff \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - b_1 \\ -2 - b_2 \end{pmatrix},$$

   und wir erhalten für f die Abbildungsmatrix

   $$A = \begin{pmatrix} 2 - b_1 & -2 - b_1 \\ 3 - b_2 & -2 - b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

   bei beliebigem Vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Nach Vorgabe bilden diese affinen Abbildungen das Punktepaar

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{vom Abstand} \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

   auf das Punktepaar

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{vom Abstand} \quad \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{41}$$

   ab und sind damit nicht abstandserhaltend, also keine Bewegungen.

3. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2005*

Es seien $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $t \in \mathbb{R}^2$. Die affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x) = A\,x + t$$

sei eine Drehung der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Drehzentrum z.

a) Begründen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\|p - z\| = \|f(p) - z\|\,.$$

b) In $\mathbb{R}^2$ seien die folgenden vier Punkte gegeben:

$$p = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad q' = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es genau eine Drehung f um ein Drehzentrum $z \in \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$f(p) = p' \qquad \text{und} \qquad f(q) = q'.$$

Berechnen Sie z, sowie die Matrix A und den Vektor t von f.

Lösung:

a) Eine Drehung f der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit dem Drehzentrum z besitzt die Gestalt

$$f(x) = D_\varphi \cdot (x - z) + z = D_\varphi \cdot x + (E - D_\varphi) \cdot z$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$; dabei sei D_φ die Drehmatrix zum Drehwinkel $\varphi \in [0; 2\pi[$. Da D_φ insbesondere eine orthogonale Matrix ist, gilt $\|D_\varphi \cdot v\| = \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$, und wir erhalten damit

$$\|f(p) - z\| = \|(D_\varphi \cdot (p - z) + z) - z\| = \|D_\varphi \cdot (p - z)\| = \|p - z\|$$

für alle $p \in \mathbb{R}^2$.

b) Wir ermitteln zunächst die notwendige Gestalt einer Drehmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eines Vektors $t \in \mathbb{R}^2$, so daß die damit gegebene Drehung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = A \cdot x + t,$$

die geforderten Eigenschaften $f(p) = p'$ und $f(q) = q'$ für die Punkte

$$p = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad q' = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt, und überprüfen danach, ob die gefundene Abbildung tatsächlich das Gewünschte leistet. Wegen $p' = f(p) = A \cdot p + t$ und $q' = f(q) = A \cdot q + t$

ergibt sich durch Differenzbildung $A \cdot (p - q) = p' - q'$, wobei $A = D_\varphi$ für ein geeignetes $\varphi \in [0; 2\pi[$ ist; damit erhält man

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=p-q} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=p'-q'},$$

also das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{(I)} & \frac{3}{2} \cdot \cos\varphi & + & 2 \cdot \sin\varphi & = & \frac{3}{2} \\ \text{(II)} & \frac{3}{2} \cdot \sin\varphi & - & 2 \cdot \cos\varphi & = & 2 \end{array}$$

woraus mit $3 \cdot \text{(I)} - 4 \cdot \text{(II)}$ zum einen $\frac{25}{2} \cdot \cos\varphi = -\frac{7}{2}$, also $\cos\varphi = -\frac{7}{25}$, und mit $4 \cdot \text{(I)} + 3 \cdot \text{(II)}$ zum anderen $\frac{25}{2} \cdot \sin\varphi = 12$, also $\sin\varphi = \frac{24}{25}$, folgt. Damit ist zunächst

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} t = p' - A \cdot p = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}&. \end{aligned}$$

Wir überprüfen nun, ob die in Frage kommende affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = A \cdot x + t,$$

mit

$$A = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad t = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

eine Drehung mit den gewünschten Eigenschaften ist, und bestimmen dann das Drehzentrum z. Zunächst ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine orthogonale Matrix mit $\det(A) = 1$ und folglich eine Drehmatrix; damit ist f eine Drehung der euklidischen Ebene, und es gilt

$$\begin{aligned} f(p) = A \cdot p + t = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} &= p' \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} f(q) = A \cdot q + t = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} &= q'. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Drehzentrums $z \in \mathbb{R}^2$ von f lösen wir die aus der allgemeinen Gestalt einer Drehung gewonnene Gleichung $t = (E - D_\varphi) \cdot z$ auf und erhalten wegen

$$\begin{aligned}(E - D_\varphi)^{-1} &= \left(\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 32 & 24 \\ -24 & 32 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \left(\frac{8}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \\ &= \frac{25}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{25}{8} \cdot \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

schließlich

$$z = (E - D_\varphi)^{-1} \cdot t = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$