MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 12
10.07.2015

Lösung zum 12. Tutorium

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011*

   Geben Sie eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{3,3}$ an, welche (bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$) eine Drehung um die vom Vektor $v = (1, 1, -1)^t$ aufgespannten Drehachse mit Drehwinkel $\phi = \frac{\pi}{2}$ beschreibt.

   Lösung:

   Der Vektor $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Richtungsvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Drehachse sind wegen $u_1 \circ v = 0$ orthogonal; damit bilden u_1, u_2, v mit

$$u_2 = v \times u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   ein Orthogonalsystem und folglich

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   eine Orthonormalbasis im euklidischen $\mathbb{R}^3$. Bei den zu betrachtenden Drehungen bleibt v_3 als Punkt der Drehachse fest, während sich die Wirkung dieser Drehungen um die Winkel $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ in der von v_1 und v_2 aufgespannten Lotebene niederschlägt;

i) Erster Lösungsvorschlag:
   Wir unterscheiden zwei Fälle:
   Wir betrachten das Rechtssystem v_1, v_2, v_3. Im ersten Fall stellt U_1 eine Drehung um den Winkel $+\pi/2$ gegen den Uhrezigersinn (bezogen auf das von v_1, v_2 aufgespannte Koordinatensystem!) dar, so dass für den ersten Basisvektor $U_1 v_1 = v_2$ gilt. Damit gilt ebenfalls $U_1 v_2 = -v_1$. Da v_3 die Drehachse darstellt, gilt weiterhin $U_1 v_3 = v_3$. Insgesamt erhalten wir

$$U_1(v_1 v_2 v_3) = (v_2 - v_1 v_3)$$

U_1 ergibt sich somit als

$$\begin{aligned}
U_1 =& (v_2 - v_1 v_3)(v_1 v_2 v_3)^{-1} = (v_2 - v_1 v_3)(v_1 v_2 v_3)^T \\
=& \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall betrachten wir eine Drehung im Uhrzeigersinn. Damit gilt für den ersten Basisvektor $U_2 v_1 = -v_2$. Damit gilt ebenfalls $U_2 v_2 = v_1$. Da v_3 die Drehachse darstellt, gilt weiterhin $U_2 v_3 = v_3$. Insgesamt erhalten wir

$$U_2(v_1 v_2 v_3) = (-v_2 v_1 v_3)$$

Analog wie oben erhalten wir

$$\begin{aligned}
U_2 =& (-v_2 v_1 v_3)(v_1 v_2 v_3)^{-1} = (-v_2 v_1 v_3)(v_1 v_2 v_3)^T \\
=& \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

ii) Zweiter Lösungsvorschlag:
Für die darstellende Matrix der beiden Drehungen bezüglich v_1, v_2, v_3 ergibt sich

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

also

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = D_1^\top$$

hierbei stellt D_1 wieder eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn dar; D_2 ist eine Drehung im Uhrezeigersinn. Damit erhalten wir

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1^\top.$$

Mit

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

ergibt sich für die Abbildungsmatrix U dieser Drehungen, also die gesuchte darstellende Matrix U bezüglich der kanonischen Basis, dann $M = P^\top U P$, also

$$\begin{aligned}
U_1 = P M_1 P^\top \quad &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
U_2 = P M_2 P^\top = P M_1^\top P^\top = (P M_1 P^\top)^\top = \\
= U_1^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

2. *Staatsexamensauafgabe Frühjahr 2009*

   Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung, welche eine Drehung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und einem Drehwinkel von $90°$ beschreibt. Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $g(x) = T \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

   Lösung:

   Wir ergänzen $v_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   zu einer Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 von $(\mathbb{R}^3, \circ)$. Bei den zu betrachtenden Drehungen bleibt v_3 als Punkt der Drehachse fest, während sich die Wirkung dieser Drehungen um die Winkel $\varphi = \pm 90°$ in der von v_1 und v_2 aufgespannten Lotebene niederschlägt; für die darstellende Matrix dieser Drehungen bezüglich v_1, v_2, v_3 ergibt sich damit

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

   also

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = D_1^\top$$

und damit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1^\top.$$

Mit

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

ergibt sich für die Abbildungsmatrix A dieser Drehungen, also die gesuchte darstellende Matrix A bezüglich der Standardbasis, dann $M = P^\top AP$, also

$$\begin{aligned} A_1 = PM_1P^\top &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{3}{5} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ -\frac{12}{25} & \frac{4}{5} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$A_2 = PM_2P^\top = PM_1^\top P^\top = (PM_1P^\top)^\top = A_1^\top = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{3}{5} & -\frac{12}{25} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{12}{25} & -\frac{4}{5} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}.$$

3. *nach Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006*

Gegeben seien die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Weiter sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_1.$$

Zeigen Sie, dass f eine Drehung ist. Bestimmen Sie die Drehachse von f und den Cosinus des Drehwinkels α von f.

Lösung:

Für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, gilt

$$A \cdot e_1 = f(e_1) = e_2, \quad A \cdot e_2 = f(e_2) = e_3 \quad \text{und} \quad A \cdot e_3 = f(e_3) = e_1$$

und damit

$$A = A \cdot (e_1, e_2, e_3) = (A \cdot e_1, A \cdot e_2, A \cdot e_3) = (e_2, e_3, e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Spalten e_2, e_1, e_3 von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden, ist A eine orthogonale Matrix, und wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0+0+1) - (0+0+0) = 1$$

beschreibt f eine Drehung im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Die Drehachse a besteht aus allen Fixpunkten von f und stimmt daher mit dem Eigenraum von A zum Eigenwert 1 überein; wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{II+I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also

$$a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und für den Drehwinkel α von f gilt

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{Spur}(A) - 1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

4. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2013*

   Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

   a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis b_1, b_2 des von den Vektoren v_1, v_2 aufgespannten Untervektorraums U.

   b) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung

   $$v_1 \mapsto \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   zu einer orthogonalen Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fortgesetzt werden kann. Bestimmen Sie alle solchen Fortsetzungen.

Lösung:

a) Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich linear unabhängig und damit schon eine Basis des Untervektorraums $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Wir unterwerfen diese dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = 3, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|}\, a_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und

$$a_2 = v_2 - (v_2 \circ b_1) \cdot b_1 = v_2 - b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|}\, a_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

damit ist b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von U bezüglich $\circ$.

b) Wir ermitteln zunächst die notwendige Gestalt einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, eine orthogonale Abbildung mit

$$f(v_1) = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f(v_2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist. Gemäß a) ist

$$b_1 = \frac{1}{3} \cdot a_1 = \frac{1}{3} \cdot v_1 \qquad \text{und} \qquad b_2 = a_2 = v_2 - b_1,$$

und mit der Linearität von f ergibt sich

$$\begin{aligned} f(b_1) = \frac{1}{3} \cdot f(v_1) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = w_1 \\ f(b_2) = f(v_2) - f(b_1) &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = w_2. \end{aligned}$$

Wir ergänzen b_1, b_2 durch

$$b_3 = b_1 \times b_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $(\mathbb{R}^3, \circ)$; ferner ist

$$w_3 = w_1 \times w_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus $b_3 \perp b_1$ und $b_3 \perp b_2$ folgt wegen der Winkeltreue von f zunächst

$$f(b_3) \perp f(b_1) = w_1 \quad \text{und} \quad f(b_3) \perp f(b_2) = w_2,$$

also $f(b_3) = \lambda \cdot w_3$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$; die Längentreue von f liefert dann

$$1 = \|b_3\| = \|f(b_3)\| = \|\lambda \cdot w_3\| = |\lambda| \cdot \|w_3\| = |\lambda| \cdot 1 = |\lambda|,$$

also $\lambda = \pm 1$, und damit $f(b_3) = \pm w_3$. Wir erhalten demnach

$$A \cdot b_1 = f(b_1) = w_1, \qquad A \cdot b_2 = f(b_2) = w_2, \qquad A \cdot b_3 = f(b_3) = \pm w_3,$$

mit der orthogonalen Matrix $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ und der (ebenfalls orthogonalen) Matrix $C = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ also

$$A \cdot B = A \cdot (b_1, b_2, b_3) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3) = (w_1, w_2, w_3) = C,$$

und damit

$$A = C \cdot B^{-1} \underset{B^{-1}=B^\top}{=} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 5 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ \mp 5 & \pm 10 & \mp 10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen nun, ob die beiden in Frage kommenden linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, mit

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ -5 & 10 & -10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ 5 & -10 & 10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

tatsächlich das Gewünschte leisten. Wegen

$$A^\top A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & \mp 5 & -14 \\ 10 & \pm 10 & -5 \\ 11 & \mp 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ \mp 5 & \pm 10 & \mp 10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

ist $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine orthogonale Matrix, also ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung, und es gilt

$$f(v_1) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ \mp 5 & \pm 10 & \mp 10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und

$$f(v_2) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ \mp 5 & \pm 10 & \mp 10 \\ -14 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$