MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 11
03.07.2015

Lösung zum 11. Tutorium

1. a) Die gegebene Matrix

$$A = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist wegen

$$A^\top A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

orthogonal und besitzt dabei die Gestalt der Spiegelungsmatrix

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \cos\varphi = \tfrac{4}{5} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = -\tfrac{3}{5}.$$

Damit ist der Endomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = A \cdot x$, eine Geradenspiegelung in $(\mathbb{R}^2, \circ)$ mit dem Eigenraum $\operatorname{Eig}(A;1)$ von A zum Eigenwert 1 als Spiegelachse a; wegen

$$A - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix} \underset{\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot \mathrm{II}}{\overset{(-5)\cdot \mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II-I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$a = \operatorname{Eig}(A;1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die gegebene Spiegelachse

$$b = \mathbb{R} \cdot v \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lotgerade

$$b^\perp = \mathbb{R} \cdot v^\perp \qquad \text{mit} \qquad v^\perp = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Geradenspiegelung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = B \cdot x$, an der Spiegelachse b gilt nun

$$g(v) = v, \quad \text{also} \quad B \cdot v = v, \quad \text{und} \quad g\left(v^\perp\right) = -v^\perp \quad \text{also} \quad B \cdot v^\perp = -v^\perp,$$

so daß sich

$$B \cdot \big(v,\ v^{\perp}\big) = \big(B \cdot v,\ B \cdot v^{\perp}\big) = \big(v,\ -v^{\perp}\big)$$

und damit

$$\begin{aligned} B = \big(v,\ -v^{\perp}\big) \cdot \big(v,\ v^{\perp}\big)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \end{aligned}$$

ergibt.

c) Die Hintereinanderausführung $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der beiden Endomorphismen g und f besitzt die Abbildungsmatrix

$$C = B \cdot A = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & 25 \\ -25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit stimmt C mit der Drehmatrix

$$D_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \varphi = \tfrac{3\pi}{2}$$

überein; damit beschreibt $g \circ f$ eine Drehung um den Winkel $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

2. a) Eine orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = w$ bildet den zu $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor

$$v^{\perp} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{der Länge} \qquad \|v^{\perp}\| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$

auf einen zu $w = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor x (wegen der Winkeltreue) der Länge $\|x\| = \sqrt{65}$ (wegen der Längentreue) ab; damit ist aber

$$f(v^{\perp}) = \pm w^{\perp} \qquad \text{mit} \qquad w^{\perp} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Für $f_1 = \ell_{A_1}$ mit $f_1(v) = w$ und $f_1(v^{\perp}) = w^{\perp}$ gilt

$$A_1 \cdot (v, v^{\perp}) = (A_1 \cdot v, A_1 \cdot v^{\perp}) = (w, w^{\perp})$$

und damit

$$\begin{aligned} A_1 = (w, w^{\perp}) \cdot (v, v^{\perp})^{-1} &= \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{65} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{65} \begin{pmatrix} -39 & 52 \\ -52 & -39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und für $f_2 = \ell_{A_2}$ mit $f_2(v) = w$ und $f_2(v^\perp) = -w^\perp$ gilt

$$A_2 \cdot (v, v^\perp) = (A_2 \cdot v, A_2 \cdot v^\perp) = (w, -w^\perp)$$

und damit

$$\begin{aligned} A_2 = (w, -w^\perp) \cdot (v, v^\perp)^{-1} &= \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{65} \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} -25 & 60 \\ 60 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

man sieht sofort, daß A_1 und A_2 orthogonale Matrizen und folglich f_1 und f_2 orthogonale Abbildungen sind.
Alternativ kann man auch die allgemeine Gestalt

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

orthogonaler 2×2–Matrizen ansetzen und $\varphi \in \mathbb{R}$ so bestimmen, daß

$$D_\varphi \cdot v = w \qquad \text{bzw.} \qquad S_\varphi \cdot v = w$$

erfüllt ist. Für D_φ ergibt sich dabei

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{array}{rcrcr} 4\cos\varphi & + & 7\sin\varphi & = & -8 \\ 4\sin\varphi & - & 7\cos\varphi & = & 1 \end{array}$$

woraus man durch $4 \cdot (\mathrm{I}) - 7 \cdot (\mathrm{II})$

$$65\cos\varphi = -39, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = -\tfrac{3}{5},$$

sowie durch $7 \cdot (\mathrm{I}) + 4 \cdot (\mathrm{II})$

$$65\sin\varphi = -52, \qquad \text{also} \qquad \sin\varphi = -\tfrac{4}{5},$$

zusammen also

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

erhält; für S_φ ergibt sich dagegen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{array}{rcrcr} 4\cos\varphi & - & 7\sin\varphi & = & -8 \\ 4\sin\varphi & + & 7\cos\varphi & = & 1 \end{array}$$

woraus man durch $4 \cdot (\mathrm{I}) + 7 \cdot (\mathrm{II})$

$$65\cos\varphi = -25, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = -\tfrac{5}{13},$$

sowie durch $7 \cdot (\mathrm{I}) - 4 \cdot (\mathrm{II})$

$$-65\sin\varphi = -60, \qquad \text{also} \qquad \sin\varphi = \tfrac{12}{13},$$

zusammen also

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix},$$

erhält; Man überprüft sofort, daß A_1 und A_2 orthogonale Matrizen und folglich f_1 und f_2 orthogonale Abbildungen sind, die v auf w abbilden.

b) Wegen $\det(A_1) = 1$ ist f_1 orientierungstreu; f_1 bildet ja das Rechtssystem $v, v^\perp$ auf das Rechtssystem $w, w^\perp$ ab. Die Abbildung f_1 beschreibt eine Drehung um den Ursprung, wobei für den Drehwinkel φ gilt $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$.
Wegen $\det(A_2) = -1$ ist f_2 orientierungsumkehrend; f_2 bildet ja das Rechtssystem $v, v^\perp$ auf das Linkssystem $w, -w^\perp$ ab. Die Abbildung f_2 beschreibt eine Achsenspiegelung mit der Spiegelachse $\mathbb{R} \cdot a = \mathrm{Eig}(A_2; 1)$; wegen

$$A - E = \begin{pmatrix} -\frac{18}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{8}{13} \end{pmatrix} \underset{\frac{13}{4}\cdot \mathrm{II}}{\overset{(-\frac{13}{6})\cdot \mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist etwa $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. a) Mit Hilfe der Orthonormalbasen

$$b_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ von } U \quad \text{bzw.} \quad b_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ von } U^\perp$$

ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ mit

$$A \cdot b_1 = b_1 \qquad \text{sowie} \qquad A \cdot b_2 = -b_2 \quad \text{und} \quad A \cdot b_3 = -b_3,$$

so daß sich

$$A \cdot (b_1, b_2, b_3) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3) = (b_1, -b_2, -b_3)$$

und damit wegen $(b_1, b_2, b_3) \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ dann

$$\begin{aligned} A &= (b_1, -b_2, -b_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)^\top = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ergibt.

b) Mit Hilfe der Orthonormalbasen

$$b_1 = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ von } U \qquad \text{bzw.} \qquad b_3 = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ von } U^\perp$$

ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ mit

$$A \cdot b_1 = b_1 \quad \text{und} \quad A \cdot b_2 = b_2 \qquad \text{sowie} \qquad A \cdot b_3 = -b_3,$$

so daß sich

$$A \cdot (b_1, b_2, b_3) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3) = (b_1, b_2, -b_3)$$

und damit wegen $(b_1, b_2, b_3) \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ dann

$$A = (b_1, b_2, -b_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)^\top = \\ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt.
Hinweis: Die Orthonormalbasis von U kann beliebig gewählt werden. Mit den beiden angegebenen Vektoren v und w und dem Gram-Schmidt Verfahren können Sie mit Hilfe des eine ONB von U konstruieren.

4. Die gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist wegen

$$A \cdot A^\top = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal und wegen

$$A^\top = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} = A$$

auch symmetrisch; folglich beschreibt die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x,$$

eine (Orthogonal–) Spiegelung an der sogenannten Fixpunktmenge [1]

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = x\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 1 \cdot x\right\} = \mathrm{Eig}(A; 1);$$

wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -8 & -4 \\ -8 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\dim U = 3 - \mathrm{Rang}\,(A - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2,$$

und damit ist U eine Ebene mit

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

[1] Hinweis: Im Staatsexamen finden sich auch Aufgaben zu Fixpunktmengen. Damit Sie diesen Begriff schon einmal gesehen haben, wird er hier in der Lösung erwähnt.