Lösung zum 10. Tutoriumsblatt

1. a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=}$$

$$= (-3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{I}-\text{II}}{\underset{\text{III}+2\cdot\text{II}}{=}}$$

$$= -(\lambda+3) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 6-2\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} \overset{(\lambda-3)\text{ aus I}}{\underset{(\lambda-3)\text{ aus III}}{=}}$$

$$= -(\lambda+3)\,(\lambda-3)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (\lambda+3)^2\,(\lambda-3)^2;$$

damit besitzt A die beiden doppelten Eigenwerte $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 3$.

b) Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{II}-5\cdot\text{I}}{\underset{\text{III}+\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{III}+\text{II}}{\underset{\text{II}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)$, und wegen $v_1 \perp v_2$ ist

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)$. Wegen

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}-1&-1&0&2\\-1&-1&0&2\\0&0&-6&0\\2&2&0&-4\end{pmatrix}\underset{\mathrm{IV}+2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}-1&-1&0&2\\0&0&0&0\\0&0&-6&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{\mathrm{III}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)}{\overset{\mathrm{I}\cdot(-1)}{\rightsquigarrow}}\begin{pmatrix}1&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ist $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_2)$, und mit dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren ergibt sich

$$a_3=v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad\|a_3\|=\sqrt{2},\quad\text{also}\quad b_3=\frac{1}{\|a_3\|}\cdot a_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

sowie

$$a_4=v_4-(v_4\circ b_3)\cdot b_3=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_4\|=\sqrt{3},\quad\text{also}\quad b_4=\frac{1}{\|a_4\|}\cdot a_4=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix};$$

wegen $\langle b_3,b_4\rangle=\langle v_3,v_4\rangle$ ist b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_2)$.

c) Mit der orthogonalen Matrix

$$P=(b_1,b_2,b_3,b_4)=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\1&0&0&0\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

und der Diagonalmatrix

$$D=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2)=\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

gilt dann $P^\top AP=D$.

2. a) Aufgrund ihrer Symmetrie ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(A - E) = 1$; damit ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert von A der Vielfachheit 2, und die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\operatorname{Eig}(A; \lambda_1)$. Damit besitzt A einen zweiten Eigenwert λ_2 der Vielfachheit 1 mit $\operatorname{Eig}(A; \lambda_2) = \operatorname{Eig}(A; \lambda_1)^\perp$; folglich ist der Vektor $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\operatorname{Eig}(A; \lambda_2)$, und wegen $A \cdot v_3 = 4\, v_3$ ergibt sich $\lambda_2 = 4$.

b) Wegen $\operatorname{Eig}(A; \lambda_1) = \operatorname{Eig}(A; \lambda_2)^\perp$ ist $v_2' = v_1 \times v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein (auf v_1 senkrecht stehender) Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1, und folglich bilden

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma_E)$ aus Eigenvektoren von A. Mit

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

erhält man somit, daß $P^{-1} A P = P^\top A P = D$ Diagonalgestalt besitzt.

c) Für $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $F^2 = D$, und für

$$\begin{aligned} B = PFP^\top &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhält man damit

$$B^2 = \left(PFP^\top\right)\left(PFP^\top\right) = PF^2P^\top = PDP^\top = P\left(P^\top A P\right)P^\top = A.$$

3. a) Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \\ = (9-\lambda)\,(6-\lambda) - 2\cdot 2 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda-5)\,(\lambda-10) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 10$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 10$. Folglich ist

$$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \circ)$ aus Eigenvektoren für A.

b) Gemäß a) ergibt sich für die orthogonale Matrix

$$T = (w_1, w_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und die Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Beziehung $T^{-1}\cdot A\cdot T = D$.

c) Mit Hilfe der Beziehung aus b) ergibt sich zunächst

$$A = \left(T\cdot T^{-1}\right)\cdot A\cdot\left(T\cdot T^{-1}\right) = T\cdot\left(T^{-1}\cdot A\cdot T\right)\cdot T^{-1} = T\cdot D\cdot T^{-1};$$

wir zeigen nun $A^n = T\cdot D^n\cdot T^{-1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
„$n = 1$“:

$$A^1 = A = T\cdot D\cdot T^{-1} = T\cdot D^1\cdot T^{-1}.$$

„$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n\cdot A = \left(T\cdot D^n\cdot T^{-1}\right)\cdot\left(T\cdot D\cdot T^{-1}\right) = \\ = T\cdot D^n\cdot\left(T^{-1}\cdot T\right)\cdot D\cdot T^{-1} = T\cdot D^n\cdot D\cdot T^{-1} = T\cdot D^{n+1}\cdot T^{-1}. \end{aligned}$$

d) Wegen

$$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} = 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

und

$$T^{-1} = T^\top = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich mit Hilfe von c)

$$A^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{5^n}{5} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} -1 & 2^{n+1} \\ 2 & 2^n \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+2}+1 & 2^{n+1}-2 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n+4 \end{pmatrix}.$$

4. Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist orthogonal diagonalisierbar, es existiert also eine orthogonale Matrix

$$D = P^\top A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Wegen $A^5 = E$ folgt daraus

$$D^5 = (P^\top A P)^5 = P^\top A^5 P = P^\top E P = P^\top P = E,$$

wegen

$$D^5 = \begin{pmatrix} \lambda_1^5 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^5 \end{pmatrix}$$

also $\lambda_1^5 = 1$, $\lambda_2^5 = 1$ und $\lambda_3^5 = 1$; demnach ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ und damit $D = E$, woraus sich schließlich in

$$A = PDP^\top = PEP^\top = PP^\top = E$$

die Behauptung ergibt.