Lösung zum 9. Übungsblatt

1. Für $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 5 \\ 4 & 5-\lambda & 0 \\ 5 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$
$$= (5-\lambda)^3 - 25\,(5-\lambda) - 16\,(5-\lambda) = (5-\lambda)\cdot[(\lambda-5)^2 - 41] =$$
$$= -(\lambda-5)\,(\lambda-5+\sqrt{41})\,(\lambda-5-\sqrt{41});$$

damit besitzt A die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 5-\sqrt{41}$ und $\lambda_3 = 5+\sqrt{41}$. Wegen

$$A - \lambda_1\, E = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $b_1 = \frac{1}{\sqrt{41}} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ ein normierter Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1, und wegen

$$A - \lambda_2\, E = \begin{pmatrix} \sqrt{41} & 4 & 5 \\ 4 & \sqrt{41} & 0 \\ 5 & 0 & \sqrt{41} \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}\cdot\sqrt{41}}{\overset{\mathrm{II}\cdot\sqrt{41}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} \sqrt{41} & 4 & 5 \\ 4\sqrt{41} & 41 & 0 \\ 5\sqrt{41} & 0 & 41 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-5\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-4\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sqrt{41} & 4 & 5 \\ 0 & 25 & -20 \\ 0 & -20 & 16 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+4\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{5}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} \sqrt{41} & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $b_2 = \frac{1}{\sqrt{82}} \begin{pmatrix} -\sqrt{41} \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein normierter Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_2. Damit ist aber

$$b_3 = b_1 \times b_2 = \frac{1}{\sqrt{41}\,\sqrt{82}} \begin{pmatrix} 41 \\ 4\sqrt{41} \\ 5\sqrt{41} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{82}} \begin{pmatrix} \sqrt{41} \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ein normierter Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_3. Mit

$$P = \big(b_1, b_2, b_3\big) = \tfrac{1}{\sqrt{82}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{41} & \sqrt{41} \\ 5\sqrt{2} & 4 & 4 \\ -4\sqrt{2} & 5 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\sqrt{41} & 0 \\ 0 & 0 & 5+\sqrt{41} \end{pmatrix}$$

gilt dann $P^\top A P = D$; damit wird A von P orthogonal diagonalisiert.

Für $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 5-\lambda & 4 \\ 4 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{(\lambda-1)\text{ aus I}}{\underset{(\lambda-1)\text{ aus III}}{=}} (\lambda-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)^2 \cdot (5 - \lambda + 4 + 4) = -(\lambda-1)^2 \cdot (\lambda - 13);$$

damit besitzt A den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 13$, und es gilt $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)^\perp = \mathrm{Eig}(A;\lambda_2)$. Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1)$. Damit ist aber

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_2)$, und es ergibt sich

$$v_2' = v_1 \times v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A;\lambda_1) \quad \text{mit} \quad v_1 \perp v_2';$$

es ist also $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A. Mit

$$P = \bigl(b_1, b_2, b_3\bigr) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

gilt dann $P^\top AP = D$; damit wird A von P orthogonal diagonalisiert.

2. a) Aufgrund ihrer Symmetrie ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ orthogonal diagonalisierbar. Dabei gilt:

   - Wegen

     $$A - (-1)E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

     ist $\mathrm{Rang}(A - (-1)E) = 2$; damit ist $\lambda_1 = -1$ ein Eigenwert von A der Vielfachheit 1 mit dem normierten Eigenvektor $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   - Wegen

     $$A - 3E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

     ist $\mathrm{Rang}(A - 3E) = 2$; damit ist $\lambda_2 = 3$ ein Eigenwert von A der Vielfachheit 1 mit dem normierten Eigenvektor $b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   - Wegen

     $$A - (-3)E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

     ist $\mathrm{Rang}(A - (-3)E) = 2$; damit ist $\lambda_3 = -3$ ein Eigenwert von A der Vielfachheit 1 mit den normierten Eigenvektor $b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A, und mit

   $$P = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

gilt

$$P^\top AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Aufgrund ihrer Symmetrie ist die Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$B - 4E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(B-4E) = 1$; damit ist $\lambda_1 = 4$ ein Eigenwert von B der Vielfachheit 2, und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(B;\lambda_1)$. Damit besitzt B einen zweiten Eigenwert λ_2 der Vielfachheit 1 mit $\operatorname{Eig}(B;\lambda_2) = \operatorname{Eig}(B;\lambda_1)^\perp$; folglich ist der Vektor

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\operatorname{Eig}(B;\lambda_2)$. Wegen $\operatorname{Eig}(B;\lambda_1) = \operatorname{Eig}(B;\lambda_2)^\perp$ ist

$$v_1' = v_2 \times v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein (auf v_2 senkrecht stehender) Eigenvektor von B zum Eigenwert λ_1, und folglich bilden

$$b_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma_E)$ aus Eigenvektoren von B.

3. a) Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar, es existiert folglich eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, so daß die Matrix

$$D = P^\top AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalgestalt besitzt. Damit ergibt sich

$$D^4 = (P^\top AP)^4 = P^\top A^4 P = P^\top AP = D,$$

wegen

$$D^4 = \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^4 \end{pmatrix}$$

also

$$\lambda_1^4 = \lambda_1, \ldots, \lambda_n^4 = \lambda_n.$$

Für eine reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt aber

$$\lambda^4 = \lambda \implies \lambda(\lambda^3 - 1) = 0 \implies \lambda = 0 \text{ oder } \lambda^3 = 1 \implies$$
$$\implies \lambda = 0 \text{ oder } \lambda = 1 \implies \lambda^2 = \lambda.$$

Folglich ist $\lambda_1^2 = \lambda_1, \ldots, \lambda_n^2 = \lambda_n$ und damit

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = D,$$

woraus sich dann

$$A^2 = (PDP^\top)^2 = PD^2P^\top = PDP^\top = A$$

ergibt.

b) Für die Drehmatrix $A = D_{\frac{2\pi}{3}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt zwar

$$A^4 = D_{\frac{2\pi}{3}}^4 = D_{4\cdot\frac{2\pi}{3}} = D_{\frac{8\pi}{3}} = D_{\frac{2\pi}{3}} = A,$$

aber

$$A^2 = D_{\frac{2\pi}{3}}^2 = D_{2\cdot\frac{2\pi}{3}} = D_{\frac{4\pi}{3}} \neq D_{\frac{2\pi}{3}} = A.$$

4. a) Aufgrund ihrer Symmetrie ist die Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$B - (-1)E_4 = B + E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(B + E_4) = 1$; damit ist $\lambda_1 = -1$ ein Eigenwert von B der Vielfachheit 3, und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $E = \operatorname{Eig}(B; \lambda_1)$.

b) Wegen $E = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ ist $E^\perp = \mathbb{R} \cdot n$ mit $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wegen

$$B \cdot n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot n$$

ist n ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$. Insgesamt besitzt also B den dreifachen Eigenwert $\lambda_1 = -1$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 3$, so daß sich für das charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3\,(\lambda - \lambda_2) = (\lambda + 1)^3\,(\lambda - 3)$$

ergibt.

c) Für $b = 0$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a^4;$$

und für $b \neq 0$ ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = b^4 \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{a}{b} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{a}{b} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} = b^4 \cdot \chi_B\left(-\frac{a}{b}\right) =$$

$$= b^4 \left(-\frac{a}{b} + 1\right)^3 \left(-\frac{a}{b} - 3\right) = (-a + b)^3(-a - 3\,b) = (a - b)^3(a + 3b).$$

Damit gilt für alle a, $b \in \mathbb{R}$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = (a - b)^3\,(a + 3\,b).$$