MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 8
26.06.2015

Lösung zum 8. Übungsblatt

1. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   a) Man zeige, daß σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

   b) Man bestimme bezüglich σ_A die Längen der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sowie die von ihnen eingeschlossenen Winkel.

   c) Man berechne eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma_A)$.

   d) Man gebe eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit $A = P^\top P$ an.

Lösung:

a) Da A eine symmetrische Matrix ist, stellt σ_A eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ dar; da die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (4+0+0) - (0+1+2) = 1$$

alle positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz auch die Matrix A und damit auch die symmetrische Bilinearform σ_A positiv definit, folglich ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \|e_1\| &= \sqrt{\sigma_A(e_1, e_1)} = \sqrt{1} = 1, \\ \|e_2\| &= \sqrt{\sigma_A(e_2, e_2)} = \sqrt{2} \quad \text{und} \\ \|e_3\| &= \sqrt{\sigma_A(e_3, e_3)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle\ (e_1, e_2) &= \frac{\sigma_A(e_1, e_2)}{\|e_1\| \cdot \|e_2\|} = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \cos \sphericalangle\ (e_1, e_3) &= \frac{\sigma_A(e_1, e_3)}{\|e_1\| \cdot \|e_3\|} = \frac{0}{1 \cdot \sqrt{2}} = 0 \quad \text{und} \\ \cos \sphericalangle\ (e_2, e_3) &= \frac{\sigma_A(e_2, e_3)}{\|e_2\| \cdot \|e_3\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also

$$\sphericalangle\ (e_1, e_2) = \frac{3\pi}{4} \text{ (bzw. } 135°), \qquad \sphericalangle\ (e_1, e_3) = \frac{\pi}{2} \text{ (bzw. } 90°)$$

und

$$\sphericalangle\ (e_2, e_3) = \frac{2\pi}{3} \text{ (bzw. } 120°).$$

c) Wir unterwerfen die Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten zunächst

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{\sigma_A(a_1, a_1)} = 1,$$

also

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

danach

$$a_2 = e_2 - \sigma_A(e_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\sigma_A(a_2, a_2)} = \sqrt{1} = 1, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$\begin{aligned} a_3 = e_3 - \sigma_A(e_3 \circ b_1) \cdot b_1 - \sigma_A(e_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{\sigma_A(a_3, a_3)} = \sqrt{1} = 1, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma_A)$.

d) Mit

$$B = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

leistet die invertierbare Matrix

$$P = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das Gewünschte.

2. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).* Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gegeben; ferner sei $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ der von v_1, v_2 und v_3 aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

a) Man zeige, daß v_1, v_2 eine Basis von U ist, und stelle v_3 als Linearkombination von v_1 und v_2 dar.

b) Man ergänze v_1, v_2 zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Man bestimme (bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$) eine Orthonormalbasis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U.

Lösung:

a) Für $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\cdot\text{I},\ \text{IV}-4\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\overset{\text{I}+\text{III},\ \text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind v_1, v_2 linear unabhängig mit $v_3 = 3\,v_1 - 2\,v_2$; insbesondere ist v_1, v_2 eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

b) Für $C = (v_1, v_2, e_1, e_2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Damit ist die Matrix $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ invertierbar; insbesondere bilden die Spalten v_1, v_2, e_1, e_2 von C eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Für $D = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ gilt

$$D^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{I}+3\cdot\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ in $\mathbb{R}^4$. Unterwirft man diese dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren, so erhält man

$$a_1 = w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{5}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_2 = w_2 - (w_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{5}\sqrt{55}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{55}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ bilden die Vektoren b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ auf $\mathbb{R}^4$.

3. *(nach Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001).* Man untersuche die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

auf Diagonalisierbarkeit und begründe jeweils das Ergebnis.

Lösung:

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,(4-\lambda)\,(6-\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 6$ und ist folglich als 3×3–Matrix diagonalisierbar.

Für $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-x)^3$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt B den Eigenwert $\lambda = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit $\alpha = 3$. Wegen

$$B - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(B - \lambda E) = 2$ und damit die geometrische Vielfachheit $\gamma = 1$; wegen $\gamma < \alpha$ ist B nicht diagonalisierbar.

4. *(nach Staatsexamensaufgabe Herbst 2002).* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = A\,x$, die lineare Abbildung des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^2, \circ)$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   a) Man zeige, daß genau dann $(*)$ $f(x) \perp x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt, wenn für die Koeffizienten $a_{11} = a_{22} = 0$ und $a_{12} + a_{21} = 0$ erfüllt ist.

   b) Man bestimme alle linearen Abbildungen f mit $(*)$ und $f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) In „$\Rightarrow$“ ergibt sich aus $(*)$ speziell für

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad a_{11} = f(x) \circ x = 0$$

und für

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad a_{22} = f(x) \circ x = 0,$$

wodurch man für

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix} \underset{a_{22}=0}{\overset{a_{11}=0}{=}} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

ferner

$$a_{12} + a_{21} = f(x) \circ x = 0$$

erhält. In „$\Leftarrow$“ besitzt die Matrix A die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$, und für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a\,x_2 \\ -a\,x_1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$f(x) \circ x = (a\,x_2)\,x_1 + (-a\,x_1)\,x_2 = 0,$$

also $f(x) \perp x$.

b) Die lineare Abbildung $f = \ell_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erfüllt nach a) die Bedingung $(*)$, und es gilt

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ irgendeine lineare Abbildung mit $(*)$ und $g\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Nach a) ist $g = \ell_B$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$, und es folgt

$$5\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,a \\ -3\,a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und damit $a = 5$; folglich ist $g = f$. Damit ist $f = \ell_A$ die einzige lineare Abbildung, die den beiden gestellten Bedingungen genügt.