Lösung zum 7.Übungsblatt

1. Für $c \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & c \\ -1 & 2 & 0 \\ c & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben.

   a) Man bestimme alle $c \in \mathbb{R}$, für die σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

   b) Für $c = 1$ bestimme man bezüglich σ_A die Längen der drei Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sowie die von ihnen eingeschlossenen Winkel.

   c) Für die Hauptuntermatrix $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von A bestimme man eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $P^\top P = A_2$.

Lösung:

a) Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A symmetrisch und folglich σ_A eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$. Nach dem Kriterium von Hurwitz ist A genau dann positiv definit, wenn alle drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = 1 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & c \\ -1 & 2 & 0 \\ c & 0 & 4 \end{vmatrix} = (8+0+0) - (2\,c^2 + 0 + 4) = 4 - 2\,c^2$$

positiv sind, also genau für $c^2 < 2$. Damit ist σ_A genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$, wenn $c \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ gilt.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \|e_1\| &= \sqrt{\sigma_A(e_1,e_1)} = \sqrt{1} = 1, \\ \|e_2\| &= \sqrt{\sigma_A(e_2,e_2)} = \sqrt{2} \quad \text{und} \\ \|e_3\| &= \sqrt{\sigma_A(e_3,e_3)} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle(e_1,e_2) &= \frac{\sigma_A(e_1,e_2)}{\|e_1\|\cdot\|e_2\|} = \frac{-1}{1\cdot\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \\ \cos \sphericalangle(e_1,e_3) &= \frac{\sigma_A(e_1,e_3)}{\|e_1\|\cdot\|e_3\|} = \frac{c}{1\cdot 2} = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \\ \cos \sphericalangle(e_2,e_3) &= \frac{\sigma_A(e_2,e_3)}{\|e_2\|\cdot\|e_3\|} = \frac{0}{1\cdot 2} = 0, \end{aligned}$$

also

$$\sphericalangle(e_1, e_2) = \frac{3\pi}{4} \text{ (bzw. } 135^\circ), \qquad \sphericalangle(e_1, e_3) = \frac{\pi}{3} \text{ (bzw. } 60^\circ)$$

und

$$\sphericalangle(e_2, e_3) = \frac{\pi}{2} \text{ (bzw. } 90^\circ).$$

c) Nach dem Kriterium von Hurwitz ist A_2 positiv definit. Wir unterwerfen die kanonische Basis e_1, e_2 von $\mathbb{R}^2$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren bezüglich des von A_2 gegebenen Skalarprodukts σ_{A_2} und erhalten

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \|a_1\| = \sqrt{\sigma_{A_2}(a_1, a_1)} = \sqrt{1} = 1,$$

also

$$b_1 = \frac{1}{||a_1||} \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$a_2 = e_2 - \sigma_{A_2}(e_2, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\sigma_{A_2}(a_2, a_2)} = \sqrt{1} = 1,$$

also

$$b_2 = \frac{1}{||a_2||} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann leistet

$$P = (b_1, b_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das Gewünschte; es ist nämlich

$$P^\top P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A_2.$$

2. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1997).*

Für den reellen Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A_s = \begin{pmatrix} 1+s & 1-s & -1 \\ 1-s & 5+s & -3 \\ -1 & -3 & 3-4\,s^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben.

a) Man ermittle für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A_s \cdot x = 0$.

b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die symmetrische Matrix A_s positiv definit?

Lösung:

a) Es ist

$$A_s = \begin{pmatrix} 1+s & 1-s & -1 \\ 1-s & 5+s & -3 \\ -1 & -3 & 3-4\,s^2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I+II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1-s & 5+s & -3 \\ -1 & -3 & 3-4\,s^2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1-s & 5+s & -3 \\ -1 & -3 & 3-4\,s^2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III+I}}{\overset{\mathrm{II}+(s-1)\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2+4\,s & -1-2\,s \\ 0 & 0 & 1-4\,s^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2\,(1+2\,s) & -(1+2\,s) \\ 0 & 0 & (1+2\,s)(1-2\,s) \end{pmatrix};$$

dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Für $s \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ ist $1+2\,s \neq 0$ sowie $1-2\,s \neq 0$ und damit

$$A_s \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \quad L_s = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Für $s = -\frac{1}{2}$ ist

$$A_{-\frac{1}{2}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \quad L_{-\frac{1}{2}} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Für $s = \frac{1}{2}$ ist

$$A_{\frac{1}{2}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \quad L_{\frac{1}{2}} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Nach dem Kriterium von Hurwitz ist die symmetrische Matrix A_s genau dann positiv definit, wenn die drei Hauptminoren

$$\det(A_{s,1}) = 1 + s,$$

$$\det(A_{s,2}) = \begin{vmatrix} 1+s & 1-s \\ 1-s & 5+s \end{vmatrix} = (1+s)(5+s) - (1-s)(1-s) =$$
$$= (5 + 6\,s + s^2) - (1 - 2\,s + s^2) = 4 + 8\,s = 4\,(1+2\,s)$$

sowie

$$\det(A_{s,3}) = \begin{vmatrix} 1+s & 1-s & -1 \\ 1-s & 5+s & -3 \\ -1 & -3 & 3-4\,s^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1-s & 5+s & -3 \\ -1 & -3 & 3-4\,s^2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2+4\,s & -1-2\,s \\ 0 & 0 & 1-4\,s^2 \end{vmatrix} = 4\,(1+2\,s)^2(1-2\,s)$$

positiv sind. Wegen

$$\det(A_{s,1}) > 0 \iff 1+s > 0 \iff -1 < s,$$
$$\det(A_{s,2}) > 0 \iff 1+2\,s > 0 \iff -\tfrac{1}{2} < s$$

sowie

$$\det(A_{s,3}) > 0 \iff 1+2\,s \neq 0 \text{ und } 1-2\,s > 0 \iff s \neq -\tfrac{1}{2} \text{ und } s < \tfrac{1}{2}$$

ist die Matrix A_s genau dann positiv definit, wenn

$$s \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

gilt.

3. Für den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachte man die durch

$$\sigma(A,B) = \mathrm{Spur}(A\,B) \qquad \text{und} \qquad \tau(A,B) = \mathrm{Spur}(A^\top B) \qquad \text{für } A,\, B \in V$$

definierten Abbildungen $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ und $\tau : V \times V \to \mathbb{R}$. (*Hinweis:* Die Definition der Spur finden Sie im Skript, Satz 8.8)

a) Man zeige, daß σ und τ symmetrische Bilinearformen auf V sind.
b) Man überprüfe, ob σ und τ Skalarprodukte auf V sind.

Lösung:

a) Für alle A, A', $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sigma(A + A', B) = \mathrm{Spur}((A + A')\,B) = \mathrm{Spur}(A\,B + A'\,B) =$$
$$= \mathrm{Spur}(A\,B) + \mathrm{Spur}(A'\,B) = \sigma(A,B) + \sigma(A',B)$$

und

$$\sigma(\lambda \cdot A, B) = \mathrm{Spur}((\lambda \cdot A)\,B) = \mathrm{Spur}(\lambda \cdot (A\,B)) =$$
$$= \lambda \cdot \mathrm{Spur}(A\,B) = \lambda \cdot \sigma(A,B)$$

sowie

$$\sigma(A,B) = \operatorname{Spur}(A\,B) = \operatorname{Spur}(B\,A) = \sigma(B,A).$$

Da sich die nachgewiesene Linearität im ersten Argument aufgrund der gezeigten Symmetrie auch auf das zweite Argument überträgt, ist σ eine symmetrische Bilinearform auf V.
Ferner gilt für alle A, A', $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\tau(A+A',B) &= \operatorname{Spur}((A+A')^\top B) = \\ &= \operatorname{Spur}((A^\top + A'^\top)B) = \operatorname{Spur}(A^\top B + A'^\top B) = \\ &= \operatorname{Spur}(A^\top B) + \operatorname{Spur}(A'^\top B) = \tau(A,B) + \tau(A',B)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tau(\lambda\cdot A,B) &= \operatorname{Spur}((\lambda\cdot A)^\top B) = \operatorname{Spur}((\lambda\cdot A^\top)\,B) = \\ &= \operatorname{Spur}(\lambda\cdot(A^\top B)) = \lambda\cdot\operatorname{Spur}(A^\top B) = \lambda\cdot\tau(A,B)\end{aligned}$$

sowie

$$\tau(A,B) = \operatorname{Spur}(A^\top B) = \operatorname{Spur}((A^\top B)^\top) = \operatorname{Spur}(B^\top A) = \tau(B,A).$$

Da sich erneut die nachgewiesene Linearität im ersten Argument aufgrund der gezeigten Symmetrie auch auf das zweite Argument überträgt, ist σ eine symmetrische Bilinearform auf V.

b) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und damit

$$\sigma(A,A) = \operatorname{Spur}(A^2) = -2 < 0;$$

damit ist σ nicht positiv definit und folglich kein Skalarprodukt auf V.
Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $C = (c_{ij})_{i,j}$ mit $C = A^\top A$; für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$ gilt $c_{kk} = a_{1k}^2 + \ldots + a_{nk}^2$ und damit

$$\tau(A,A) = \operatorname{Spur}(A^\top A) = \operatorname{Spur}(C) = \sum_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{jk}^2 \geq 0,$$

und aus $\tau(A,A) = 0$ folgt $a_{jk} = 0$ für alle j, $k \in \{1,\ldots,n\}$, also $A = 0$. Damit ist τ positiv definit und folglich ein Skalarprodukt auf V.

4. Sei (V,σ) ein euklidischer Vektorraum. Man zeige für alle v, $w \in V$:

   a) $\sigma(v,w) = \frac{1}{4}\,\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\,\|v-w\|^2$

   b) $2\,(\|v\|^2 + \|w\|^2) = \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2$ *(Parallelogrammgleichung)*

   c) $v \perp w \iff \|v+w\| = \|v-w\|$

   d) $\|v+w\| = \|v\| + \|w\| \iff w = 0$ oder $v = \lambda\,w$ für ein $\lambda \geq 0$

Lösung:
Für alle $v,\, w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \sigma(v+w, v+w) = \sigma(v, v+w) + \sigma(w, v+w) = \\ &= (\sigma(v,v) + \sigma(v,w)) + (\sigma(w,v) + \sigma(w,w)) = \|v\|^2 + 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\|v-w\|^2 &= \sigma(v-w, v-w) = \sigma(v, v-w) - \sigma(w, v-w) = \\ &= (\sigma(v,v) - \sigma(v,w)) - (\sigma(w,v) - \sigma(w,w)) = \|v\|^2 - 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2;\end{aligned}$$

diese Ergebnisse finden im folgenden Verwendung.

a) Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\,\|v+w\|^2 - \tfrac{1}{4}\,\|v-w\|^2 = \tfrac{1}{4}\,(\|v\|^2 + 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2) - \\ - \tfrac{1}{4}\,(\|v\|^2 - 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2) = \sigma(v,w).\end{aligned}$$

b) Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \left(\|v\|^2 - 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2\right) + \\ + \left(\|v\|^2 + 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2\right) = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right).\end{aligned}$$

(Die Bezeichnung „Parallelogrammgleichung“ erklärt sich wie folgt: Wir betrachten das von den Vektoren v und w aufgespannte Parallelogramm mit dem Eckpunkten 0, v, $v+w$ und w. Die Seiten zwischen 0 und v sowie $v+w$ und w besitzen jeweils die Länge $\|v\|$, die Seiten zwischen v und $v+w$ sowie w und 0 jeweils die Länge $\|w\|$; die Diagonale zwischen 0 und $v+w$ mißt die Länge $\|v+w\|$ und die Diagonale zwischen v und w die Länge $\|v-w\|$. Die Parallelogrammgleichung besagt also, daß die Quadrate über den vier Seiten des Parallelogramms zusammen dieselbe Fläche besitzen wie die Quadrate über den beiden Diagonalen.)

c) Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\|v+w\| = \|v-w\| \iff \|v+w\|^2 = \|v-w\|^2 \iff \\ \iff 2\,\sigma(v,w) = -2\,\sigma(v,w) \iff \sigma(v,w) = 0 \iff v \perp w.\end{aligned}$$

d) Es ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}\|v+w\| = \|v\| + \|w\| \iff \|v+w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \iff \\ \iff \|v\|^2 + 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \iff \\ \iff 2\,\sigma(v,w) = 2\,\|v\| \cdot \|w\| \iff \sigma(v,w) = \|v\| \cdot \|w\|;\end{aligned}$$

damit erhält man:

- Für „$\Rightarrow$“ folgt aus $\sigma(v,w) = \|v\| \cdot \|w\|$

  $$\sigma(v,w) \geq 0 \qquad \text{und damit} \qquad |\sigma(v,w)| = \sigma(v,w) = \|v\| \cdot \|w\|,$$

  woraus sich mit der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung ergibt, daß v und w linear abhängig sind; folglich ist $w = 0$ oder $v = \lambda\, w$ mit $w \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei

  $$0 \leq \sigma(v,w) = \sigma(\lambda\, w, w) = \lambda\, \sigma(w,w) = \lambda \cdot \|w\|^2$$

  und damit $0 \leq \lambda$ gilt.
- Für „$\Leftarrow$“ ergibt sich im Falle $w = 0$

  $$\sigma(v,w) = 0 = \|v\| \cdot \|w\|$$

  sowie im Falle $v = \lambda\, w$ mit $\lambda \geq 0$

  $$\begin{aligned}\sigma(v,w) = \sigma(\lambda\, w, w) = \lambda\, \sigma(w,w) = \lambda\, \|w\|^2 = (\lambda\, \|w\|) \cdot \|w\| \underset{\lambda \geq 0}{=} \\ = (|\lambda| \cdot \|w\|) \cdot \|w\| = \|\lambda\, w\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|w\|.\end{aligned}$$