MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 6
12.06.2015

Lösung zum 6. Übungsblatt

1. a) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

betrachte man die Bilinearform $\sigma_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und bestimme $\sigma_A(x,y) = x^\top A y$ allgemein für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

b) Man gebe für die Bilinearformen

- $\sigma_1(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3 - x_1\,y_3 - x_3\,y_1$,
- $\sigma_2(x,y) = x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + 3\,x_3\,y_3 + 4\,x_1\,y_2 + 5\,x_1\,y_3 + 6\,x_2\,y_3$,
- $\sigma_3(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 - x_1\,y_2 + x_1\,y_3 - x_2\,y_3$,
- $\sigma_4(x,y) = x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + x_3\,y_3 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + x_2\,y_3 + x_3\,y_2$

des $\mathbb{R}^3$ die entsprechenden Matrizen A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß a) an.

c) Befindet sich unter den bei b) betrachteten Bilinearformen auch ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$?

Lösung:

a) Es ist

$$\begin{aligned}
\sigma_A(x,y) = x^\top A y &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + a_{13}\,y_3 \\ a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + a_{23}\,y_3 \\ a_{31}\,y_1 + a_{32}\,y_2 + a_{33}\,y_3 \end{pmatrix} = \\
&= a_{11}\,x_1\,y_1 + a_{12}\,x_1\,y_2 + a_{13}\,x_1\,y_3 \\
&\quad + a_{21}\,x_2\,y_1 + a_{22}\,x_2\,y_2 + a_{23}\,x_2\,y_3 \\
&\quad + a_{31}\,x_3\,y_1 + a_{32}\,x_3\,y_2 + a_{33}\,x_3\,y_3
\end{aligned}$$

b) Gemäß a) ist der Koeffizient a_{ij} von $x_i\,y_j$ der Eintrag in der i–ten Zeile und j–ten Spalte der Matrix A; für die gegebenen Bilinearformen

- $\sigma_1(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3 - x_1\,y_3 - x_3\,y_1$,
- $\sigma_2(x,y) = x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + 3\,x_3\,y_3 + 4\,x_1\,y_2 + 5\,x_1\,y_3 + 6\,x_2\,y_3$,
- $\sigma_3(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 - x_1\,y_2 + x_1\,y_3 - x_2\,y_3$,
- $\sigma_4(x,y) = x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + x_3\,y_3 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + x_2\,y_3 + x_3\,y_2$

von $\mathbb{R}^3$ ergibt sich demnach

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Matrizen A_1 und A_4 sind (im Gegensatz zu den Matrizen A_2 und A_3) symmetrisch, so daß auch σ_1 und σ_4 (im Gegensatz zu σ_2 und σ_3) symmetrische Bilinearformen sind; wir untersuchen diese nun auf positive Definitheit mit Hilfe des Hauptminorenkriteriums nach Hurwitz: wegen

$$\det(A_{1,1}) = 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det(A_{1,2}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

sowie

$$\det(A_{1,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

ist die Matrix A_1 positiv definit und folglich σ_1 ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$, und wegen

$$\det(A_{4,1}) = 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det(A_{4,2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

sowie

$$\det(A_{4,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (2+0+0) - (0+1+1) = 0$$

ist A_4 nicht positiv definit und folglich σ_4 auch kein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$.

2. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000*

Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei die Bilinearform

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

gegeben. Zeigen Sie, dass diese Bilinearform ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert.

Lösung:
Der Nachweis, daß die gegebene Bilinearform

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

symmetrisch und positiv definit und damit ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ bildet, kann anhand der Definition oder mit Hilfe der Matrixdarstellung erfolgen:

- Wegen

$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle = y_1x_1 + 3y_2x_2 + 4y_3x_3 +& \\ &+ y_1x_2 + y_2x_1 + y_1x_3 + y_3x_1 + y_2x_3 + y_3x_2 = \\ &= x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + \\ &\qquad\qquad + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 = \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

  ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zunächst symmetrisch. Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt ferner

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1^2 + 3\,x_2^2 + 4\,x_3^2 + 2\,x_1\,x_2 + 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_2\,x_3 = \\ &= \frac{1}{2}\,(x_1 + 2\,x_2)^2 + \frac{1}{2}\,(x_1 + 2\,x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 \geq 0,\end{aligned}$$

  und aus $\langle x, x\rangle = 0$ folgt $x_1 + 2\,x_2 = x_1 + 2\,x_3 = x_2 + x_3 = x_3 = 0$ und damit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, also $x = 0$; damit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auch positiv definit.
- Für alle x, $y \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\langle x, y\rangle = x^\top Ay \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

  Wegen $A^\top = A$ ist die Matrix A und damit auch die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = \left|1\right| = 1 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$$

  sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

  alle positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix A und damit auch die Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit.

3. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2009*

Zeigen Sie: Es gibt kein Skalarprodukt $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bezüglich dessen gleichzeitig

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{gilt.}$$

Hierbei bezeichnet $a \perp b$, dass $\psi(a, b) = 0$ gilt.

Lösung:

Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0, \qquad \psi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0;$$

für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{mit} \qquad \psi(x, y) = x^\top A\, y \quad \text{für alle } \ x, y \in \mathbb{R}^2$$

gilt dann zum einen

$$0 = \psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = b,$$

also $b = 0$, und damit zum anderen

$$\begin{aligned} 0 = \psi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ c \end{pmatrix} = -2a - 4c = -2\,(a + 2c)\,, \end{aligned}$$

also $a = -2c$. Somit erhält man die Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

die nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = (-2c) \cdot c = -2\,c^2 \le 0$$

nicht positiv definit sein kann. Folglich gibt es keine positiv definite symmetrische Bilinearform, also kein Skalarprodukt, auf $\mathbb{R}^2$ mit zugleich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007* Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei die Basis

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man bestimme die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$f : V \to V, \quad f(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis A_1, A_2, A_3, A_4.

b) Entscheiden Sie, ob f diagonalisierbar ist.

Lösung:

a) Der gegebene Endomorphismus $f : V \to V$ des Vektorraums $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt wegen

$$f(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$f(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$f(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4$$

$$f(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4$$

bezüglich der Basis A_1, A_2, A_3, A_4 von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} (1-\lambda)^4$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt genau einen Eigenwert, nämlich $\lambda_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 4$, und wegen

$$M - \lambda_1\, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die geometrische Vielfachheit

$$\gamma_1 = 4 - \mathrm{Rang}(M - \lambda_1 \, E_4) = 4 - 2 = 2.$$

Wegen $\gamma_1 < \alpha_1$ ist die darstellende Matrix M und folglich auch der Endomorphismus f nicht diagonalisierbar.