Lösung zum 4. Übungsblatt

1. Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?
Lösung:
Es ist $\chi_A(\lambda) = (-3-\lambda)(b-\lambda)(2-\lambda)$.

- Fall 1: $b \neq -3, 2$:
Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ hat drei paarweise verschiedene Nullstellen, also hat die Matrix A drei paarweise verschiedene Eigenwerte und ist somit diagonalisierbar.
- Fall 2: $b = -3$:
Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$ mit algebraischer Vielfachheit $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$. Die geometrische Vielfachheit γ_1 von λ_1 ist somit ebenfalls 1, da $1 \leq \gamma_1 \leq \alpha_1 = 1$ gilt. Ferner ist

$$A - (-3)E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Für alle $a \in \mathbb{R}$ hat diese Matrix den Rang 1, also ist der Eigenraum zum Eigenwert -3 zweidimensional, d.h. $\gamma_2 = 2$. Damit ist A diagonalisierbar.
- Fall 3: $b = 2$. Siehe 3. Aufgabe auf dem 5. Tutoriumsblatt.

2. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013*

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -18 & 8 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

reell diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

Lösung:
Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) \quad &= \quad \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 1 \\ -18 & 8-\lambda & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\mathrm{I+III}}{=} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -18 & 8-\lambda & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{2-\lambda}{\underset{\text{aus I}}{=}} (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -18 & 8-\lambda & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\mathrm{II+3III}}{=} \quad (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 6-3\lambda \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{2-\lambda}{\underset{\text{aus II}}{=}} (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} \quad (2-\lambda)^2 \cdot (1-\lambda) = -(\lambda-2)^2 \cdot (\lambda - 1);
\end{aligned}$$

damit besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$). Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -18 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II-3III}}{\underset{\mathrm{III+I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist auch die geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 2$, und $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1)$; ferner ist wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -18 & 7 & 3 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I+III}}{\underset{\mathrm{II+3III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III-6I}}{\underset{\mathrm{III+2II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$. Insgesamt ist A reell diagonalisierbar, und v_1, v_2 und v_3 ist eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

3. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014*

   Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A, zeigen Sie, dass A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ ist und bestimmen Sie eine Basis aus Eigenvektoren.

Lösung:
Für das charakteristische Polynom χ_A der gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{1. Zeile}}{=}} (-1)^{1+1}(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 5 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}(-4) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{1. Z/1. Sp}}{=}} -\lambda \cdot (-1)^{1+1}(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 5 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 \cdot \big((-\lambda)^2 - 5 \cdot 1\big) + 4 \cdot 1^2 = (\lambda^2)^2 - 5\lambda^2 + 4 \\
&\overset{\text{Vieta}}{=} \big(\lambda^2 - 1\big)\big(\lambda^2 - 4\big) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A die vier verschiedenen reellen Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_4 = -2$$

und ist damit als 4×4–Matrix reell diagonalisierbar.
Wegen

$$\begin{aligned}
A - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\underset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV+III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, wegen

$$\begin{aligned}
A - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\underset{\text{II−I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III−II}}{\rightsquigarrow} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV−III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$, wegen

$$A - \lambda_3 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}+\frac{1}{2}\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_4 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}-\frac{1}{2}\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_4 = -2$. Folglich ist v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A.

4. *nach StaatsexamensaufgabeHerbst 2008*

   Betrachtet werde die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie eine 3×3–Matrix S an derart, dass $S^{-1}AS$ Diagonalform besitzt.
   Lösung:

Für das charakteristische Polynom χ_A von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \underset{(1-\lambda)\text{ aus II}}{\overset{(-1)\text{ aus I, III}}{=}} (1-\lambda)\cdot(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3+\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= (1-\lambda)\big[(\lambda(3+\lambda)+0-4)-(4+0-(3+\lambda))\big] =$$

$$= -(\lambda-1)\big[3\,\lambda+\lambda^2-4-4+3+\lambda\big] = -(\lambda-1)\big(\lambda^2+4\,\lambda-5\big) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda+5)(\lambda-1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+5)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit besitzt die Matrix A den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = -5$.

- Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\cdot(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A;\lambda_1)$. Analog bildet

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A;\lambda_2)$. Setzen wir

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_1\ \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

dann erhalten wir

$$S^{-1}AS = D$$