MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 3
22.05.2015

Lösung zum 3. Übungsblatt

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012*

   Sei A eine invertierbare reelle $n \times n$–Matrix mit $A^{-1} = A$. Die $n \times n$–Einheitsmatrix wird mit E_n bezeichnet. Zeigen Sie:

   a) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

   b) $(A + E_n) \cdot (A - E_n) = 0$.

   c) Ist 1 kein Eigenwert von A, so ist $A = -E_n$. Ist -1 kein Eigenwert von A, so ist $A = E_n$.

   Lösung:

2. Die gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist als invertierbar mit $A^{-1} = A$ vorausgesetzt; diese Bedingung ist wegen $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$ zu $A \cdot A = E_n$ gleichwertig.

   a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x = \lambda \cdot x$; damit ergibt sich

   $$\begin{aligned} x = E_n \cdot x = (A \cdot A) \cdot x = A \cdot (A \cdot x) = A \cdot (\lambda \cdot x) = \\ = \lambda \cdot (A \cdot x) = \lambda \cdot (\lambda \cdot x) = (\lambda \cdot \lambda) \cdot x = \lambda^2 \cdot x, \end{aligned}$$

   also

   $$\left(\lambda^2 - 1\right) \cdot x = \lambda^2 \cdot x - x = 0,$$

   woraus wegen $x \neq 0$ dann

   $$\lambda^2 - 1 = 0, \qquad \text{also} \qquad \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = -1$$

   folgt. Somit kommen für A nur die Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ in Frage.

   b) Es ist

   $$\begin{aligned} (A + E_n) \cdot (A - E_n) &= A \cdot (A - E_n) + E_n \cdot (A - E_n) \\ &= (A \cdot A - A \cdot E_n) + (E_n \cdot A - E_n \cdot E_n) \\ &= (A \cdot A - A) + (A - E_n) \\ &= A \cdot A - E_n = E_n - E_n = 0; \end{aligned}$$

   dabei geht die Voraussetzung $A \cdot A = E_n$ ein.

c) Wir verwenden die in b) gezeigte Beziehung

$$(A + E_n) \cdot (A - E_n) = 0$$

und schießen damit folgendermaßen:

- Ist $\lambda = 1$ kein Eigenwert von A, so gilt

$$\chi_A(1) = \det(A - 1 \cdot E_n) = \det(A - E_n) \neq 0;$$

damit ist $A - E_n$ invertierbar, und wir erhalten

$$A + E_n = 0 \cdot (A - E_n)^{-1} = 0, \qquad \text{also} \qquad A = -E_n.$$

- Ist $\lambda = -1$ kein Eigenwert von A, so gilt

$$\chi_A(-1) = \det(A - (-1) \cdot E_n) = \det(A + E_n) \neq 0;$$

damit ist $A + E_n$ invertierbar, und wir erhalten

$$A - E_n = (A + E_n)^{-1} \cdot 0 = 0, \qquad \text{also} \qquad A = E_n.$$

3. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2003*

Betrachten Sie die reelle 3×3–Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von B.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

c) Ermitteln Sie alle Eigenräume von B, indem Sie für jeden Eigenraum eine Basis angeben.

Lösung:

a) Mit Hilfe der Regel von Sarrus ergibt sich

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \big(-4 - 6 - 2 \big) - \big(-4 - 4 - 3 \big) = -1.$$

b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{\mathrm{I-II}}{\underset{\mathrm{III-II}}{=}} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{(\lambda-1)\text{ aus I}}{\underset{(\lambda+1)\text{ aus III}}{=}} (\lambda-1)\cdot(\lambda+1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Regel von}}{\underset{\text{Sarrus}}{=}} (\lambda-1)\cdot(\lambda+1)\cdot\big[(-2-\lambda) - ((-2)+(-1))\big] \\
&= -(\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1);
\end{aligned}$$

wegen

$$\chi_B(\lambda) = 0 \iff -(\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1) = 0 \iff \big(\lambda = 1 \text{ oder } \lambda = -1\big)$$

besitzt die Matrix B genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

c) Wegen

$$B - \lambda_1\, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II-I}}{\underset{\mathrm{III-I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}\leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(B;\lambda_1)$ der Matrix B zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$B - \lambda_2\, E_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II-3\cdot I}}{\underset{\mathrm{III-I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(B;\lambda_2)$ der Matrix B zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

4. *Staatsexamen Frühjahr 2006*

Es sei $s \in \mathbb{R}$ und $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ 2 & s & 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A_s ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_s. Für welche s ist $\lambda_s = 0$?

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ den Rang von A_s.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_s \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) Für den Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt $v \neq 0$ und

$$A_s \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ 2 & s & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+3 \\ s+3 \\ s+3 \end{pmatrix} = (s+3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_s \cdot v;$$

damit ist v ein Eigenvektor der Matrix A_s zum Eigenwert $\lambda_s = s+3$ mit

$$\lambda_s = 0 \iff s+3 = 0 \iff s = -3.$$

b) Die Matrix $A_s \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ besitzt genau dann den (vollen) Rang $(A_s) = 3$, wenn sie invertierbar ist; wegen

$$\begin{aligned}\det(A_s) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ 2 & s & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{III+I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ 3 & s+2 & s+1 \end{vmatrix} \underset{\text{III+II}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ s+3 & s+3 & s+3 \end{vmatrix} \underset{(s+3) \text{ aus III}}{=} (s+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & s \\ s & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \\ &= (s+3) \cdot \big((1+4+s^2) - (s+2+2\,s)\big) = (s+3) \cdot \big(s^2 - 3\,s + 3\big)\end{aligned}$$

mit

$$s^2 - 3\,s + 3 = \left(s - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ ist dies genau für

$$\det(A_s) \neq 0 \iff s+3 \neq 0 \iff s \neq -3$$

der Fall. Für den verbleibenden Fall $s = -3$ erhält man wegen

$$A_{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{I}}{\overset{\text{II}+3\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

schließlich Rang $(A_{-3}) = 2$.

c) Im Falle $s \neq -3$ ist die Matrix A_s gemäß b) invertierbar, so daß das lineare Gleichungssystem $A_s \cdot x = v$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt; gemäß a) gilt $A_s \cdot v = \lambda_s \cdot v$, also

$$A_s \cdot \left(\frac{1}{\lambda_s} \cdot v\right) = \frac{1}{\lambda_s} \cdot (A_s \cdot v) = \frac{1}{\lambda_s} \cdot (\lambda_s \cdot v) = \left(\frac{1}{\lambda_s} \cdot \lambda_s\right) \cdot v = 1 \cdot v = v,$$

so daß in diesem Fall

$$L = \left\{ \frac{1}{\lambda_s} \cdot v \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{s+3} \\ \frac{1}{s+3} \\ \frac{1}{s+3} \end{pmatrix} \right\}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_s \cdot x = v$ ist. Im Falle $s = -3$ ergibt sich wegen

$$(A_{-3}|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-2\text{I}}{\overset{\text{II}+3\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -1 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

ein Widerspruch in der dritten Zeile, so daß in diesem Fall die Lösungsmenge $L = \emptyset$ leer ist.

5. Man bestimme alle Eigenwerte sowie Basen der zugehörigen Eigenräume für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- Es ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)\,(3-\lambda) - (-4) = \lambda^2 - 4\,\lambda + 7 = (\lambda - 2)^2 + 3 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt χ_A keine Nullstelle und folglich A keinen Eigenwert.

- Es ist

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & -2 \\ 8 & -2-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{II}-4\cdot\text{III}}{\overset{\text{I}-2\cdot\text{III}}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -4+2\,\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -8+4\,\lambda \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{(2-\lambda)\text{ aus III}}{\overset{(2-\lambda)\text{ aus I}}{=}} (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= (2-\lambda)^2 \cdot [(1-\lambda) - (-4+4)] = -(\lambda-2)^2\,(\lambda-1)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt B die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$. Wegen

$$B - \lambda_1\, E = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 8 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\operatorname{Eig}(B; \lambda_1)$, und wegen

$$B - \lambda_2\, E = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\operatorname{Eig}(B; \lambda_2)$.

- Es ist

$$\chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda\, E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 9-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 8-\lambda & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{=}$$

$$= (9-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{III}+2\cdot\text{II}}{\overset{\text{I}-2\cdot\text{II}}{=}}$$

$$= (9-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 9-\lambda & -18+2\,\lambda & 0 \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 0 & 18-2\,\lambda & 9-\lambda \end{vmatrix} \underset{(9-\lambda)\text{ aus III}}{\overset{(9-\lambda)\text{ aus I}}{=}}$$

$$= (9-\lambda)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (9-\lambda)^3 \cdot [(8-\lambda) - (4+4)] = \lambda\,(\lambda-9)^3$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt C die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 9$. Wegen

$$C - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(C; \lambda_1)$, und wegen

$$C - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(C; \lambda_2)$.