MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 2
03.05.2015

Lösung zum 2. Übungsblatt

1. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in } \mathbb{R}^3$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{in } \mathbb{R}^2$$

sowie die Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und w_1, w_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, und bestimme die darstellende Matrix von $\ell_{A_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser beiden Basen.

b) Warum gibt es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$? Man bestimme zudem eine Matrix $A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f = \ell_{A_2}$.

c) Man bestimme eine Matrix $A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ derart, daß für die lineare Abbildung $g = \ell_{A_3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sowohl $\mathrm{Kern}(g) = \mathbb{R}\, w_1$ als auch $\mathrm{Bild}(g) = \mathbb{R}\, v_1$ gilt.

Lösung:

a) Um zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis vom $\mathbb{R}^3$ ist, muss gezeigt werden, dass die Matrix $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist. Dies kann entweder gezeigt werden, indem $\det(B) \neq 0$ gezeigt wird, oder in dem die inverse Matrix von B berechnet wird:

$$(B|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-2\text{II}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = (E_3|B^{-1});$$

damit ist B invertierbar, insbesondere also v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Für $C = (w_1, w_2)$ gilt

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

damit ist C invertierbar mit

$$C^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$$

insbesondere ist w_1, w_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Für die darstellende Matrix M von $\ell_{A_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser beiden Basen gilt demnach

$$M = C^{-1} A_1 B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Da v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, gibt es (gemäß dem Prinzip der linearen Fortsetzung) für jede Vorgabe von Vektoren w_1, w_2, w_3 in $\mathbb{R}^2$ genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2 \quad \text{und} \quad f(v_3) = w_3.$$

Mit $C' = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ gilt dann für die Matrix $A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f = \ell_{A_2}$

$$A_2 \cdot v_1 = f(v_1) = w_1, \quad A_2 \cdot v_2 = f(v_2) = w_2 \quad \text{und} \quad A_3 \cdot v_3 = f(v_3) = w_3$$

und damit

$$A_2 \cdot B = (A_2 \cdot v_1, A_2 \cdot v_2, A_2 \cdot v_3) = (w_1, w_2, w_3) = C',$$

also

$$A_2 = C' \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Gemäß a) ist w_1, w_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$; demnach gibt es eine (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad g(w_1) = 0 \quad \text{und} \quad g(w_2) = v_1;$$

damit ist

$$\mathbb{R} \cdot w_1 \subseteq \operatorname{Kern}(g) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R} \cdot v_1 \subseteq \operatorname{Bild}(g),$$

und mit der Dimensionsformel

$$\dim \operatorname{Kern}(g) + \dim \operatorname{Bild}(g) = 2$$

erhält man schon

$$\operatorname{Kern}(g) = \mathbb{R}\, w_1 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Bild}(g) = \mathbb{R}\, v_1.$$

Mit $B' = (0, v_1) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ergibt sich für die Matrix $A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit $g = \ell_{A_3}$

$$A_3 \cdot w_1 = g(w_1) = 0 \quad \text{und} \quad A_3 \cdot w_2 = g(w_2) = v_1$$

und damit

$$A_3 \cdot C = (A_3 \cdot w_1, A_3 \cdot w_2) = (0, v_1) = B',$$

also

$$A_3 = B' \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. *Nach Staatsexamensaufgabe Herbst 2004*

   a) Zeigen Sie, dass die Matrix

   $$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   invertierbar ist, und bestimmen Sie S^{-1}.

   b) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

   $$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   gegeben. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

   $$f(a_1) = a_2, \qquad f(a_2) = a_3 \qquad f(a_3) = a_1,$$

   und bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

   c) Geben Sie mit Hilfe der in Teilaufgabe b) angegebenen Abbildungsvorschrift einen Eigenvektor mit zugehörigem Eigenwert an.

Lösung:

a) Es ist

$$(S|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = (E_3|S')$$

Damit ist S invertierbar mit $S^{-1} = S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

b) Da die Matrix $S = (a_1, a_2, a_3)$ gemäß a) invertierbar ist, bilden ihre Spalten a_1, a_2, a_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$; demnach gibt es für jeden $\mathbb{R}$–Vektorraum W und jede Wahl von Vektoren w_1, w_2, $w_3 \in W$ genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to W \quad \text{mit} \quad f(a_1) = w_1, \quad f(a_2) = w_2 \quad \text{und} \quad f(a_3) = w_3.$$

Insbesondere existiert also genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$ und $f(a_3) = a_1$; für die gesuchte Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$A\,a_1 = f(a_1) = a_2, \quad A\,a_2 = f(a_2) = a_3 \quad \text{und} \quad A\,a_3 = f(a_3) = a_1,$$

also

$$A \cdot (a_1, a_2, a_3) = (A\,a_1, A\,a_2, A\,a_3) = (a_2, a_3, a_1)\,.$$

Mit $T = (a_2, a_3, a_1) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt also $A \cdot S = T$, und man erhält

$$A = T \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ läßt sich die Aufgabe auch ohne Verwendung des Prinzips der linearen Fortsetzung wie folgt lösen: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$ und $f(a_3) = a_1$; für ihre Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $A\,a_1 = f(a_1) = a_2$, $A\,a_2 = f(a_2) = a_3$ und $A\,a_3 = f(a_3) = a_1$, also $A \cdot (a_1, a_2, a_3) = (a_2, a_3, a_1)$, und man erhält wie oben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist schon gezeigt, daß es höchstens eine lineare Abbildung mit den geforderten Eigenschaften gibt, nämlich ℓ_A; die Probe

$$\ell_A(a_1) = A\,a_1 = a_2, \quad \ell_A(a_2) = A\,a_2 = a_3 \quad \text{und} \quad \ell_A(a_3) = A\,a_3 = a_1$$

beweist nun, daß $f = \ell_A$ auch das Gewünschte leistet.

c) Für einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$ muss $f(v) = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten. Da a_1, a_2, a_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, kann $v \in \mathbb{R}^3$ wie folgt geschrieben werden: $v = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich

$$f(v) = c_1 f(a_1) + c_2 f(a_2) + c_3 f(a_3) = c_1 a_2 + c_2 a_3 + c_3 a_1$$

Andererseits ist laut Voraussetzung

$$f(v) = \lambda v = \lambda(c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, dass

$$\lambda c_1 = c_3 \quad , \lambda c_2 = c_1 \quad , \lambda c_3 = c_2 \quad ,$$

gelten muss. Dies ist ein Gleichungssystem für die Unbekannten λ, c_1, c_2, c_3. Dieses Gleichungssystem wird z.B. durch $\lambda = 1, c_1 = c_2 = c_3 = 1$ gelöst. Daher ist

$$v = a_1 + a_2 + a_3$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$.

3. *Staatsexamen Frühjahr 2014*

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A\,x$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Gegeben seien weiterhin die drei Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix B von f bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 (Sie können auch das Ergebnis aus dem Tutoriumsblatt 3 übernehmen).

b) Berechnen Sie B^n für alle $n \in \mathbb{N}$ und bestimmen Sie daraus A^n.

c) Die reellen Folgen (u_n), (v_n), (w_n) seien durch folgende Rekursionsformeln definiert: $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 2$ und für alle $n \geq 0$ sei

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3\,u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &= 2\,v_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n + 3\,w_n \end{aligned}$$

Berechnen Sie u_n, v_n, w_n für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

a) Für die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist die zugehörige lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x$, zu betrachten. Ferner ist für die drei gegebenen Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

die Hilfsmatrix $P = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß

$$\begin{aligned}
(P \mid E_3) \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III+I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III-II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{I-III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (E_3 \mid P')
\end{aligned}$$

invertierbar mit $P^{-1} = P'$; insbesondere ist b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$\begin{aligned}
f(b_1) = A \cdot b_1 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \\
f(b_2) = A \cdot b_2 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \\
f(b_3) = A \cdot b_3 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 4 \cdot b_3
\end{aligned}$$

ergibt sich die darstellende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$.

b) Als n–te Potenz B^n mit $n \in \mathbb{N}$ der Diagonalmatrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ergibt sich

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Gemäß dem Basiswechsel erhält man

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P \qquad \text{bzw.} \qquad A = P \cdot B \cdot P^{-1},$$

woraus über

$$A^2 = A \cdot A = \big(P \cdot B \cdot \underbrace{P^{-1}\big) \cdot \big(P}_{=E_3} \cdot B \cdot P^{-1}\big) = P \cdot B^2 \cdot P^{-1}$$

und

$$A^3 = A^2 \cdot A = \big(P \cdot B^2 \cdot \underbrace{P^{-1}\big) \cdot \big(P}_{=E_3} \cdot B \cdot P^{-1}\big) = P \cdot B^3 \cdot P^{-1}$$

induktiv

$$\begin{aligned}
A^n &= P \cdot B^n \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2^n & -2^n & 2^n \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1+2^n & 1-2^n & -1+2^n \\ 0 & 2 & 0 \\ -1+2^n & 1-2^n & 1+2^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}
\end{aligned}$$

folgt.

c) Zu den durch die Startwerte $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ und $w_0 = 2$ durch

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 3\,u_n - v_n + w_n \\
v_{n+1} &= 2\,v_n \\
w_{n+1} &= u_n - v_n + 3\,w_n
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definierten Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen betrachten wir

$$x_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0;$$

damit ist $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,u_n - v_n + w_n \\ 2\,v_n \\ u_n - v_n + 3\,w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \cdot x_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit erhält man $x_1 = A \cdot x_0$ sowie über

$$x_2 = A \cdot x_1 = A \cdot (A \cdot x_0) = (A \cdot A) \cdot x_0 = A^2 \cdot x_0$$

und

$$x_3 = A \cdot x_2 = A \cdot \left(A^2 \cdot x_0\right) = (A \cdot A^2) \cdot x_0 = A^3 \cdot x_0$$

induktiv

$$\begin{aligned}
x_n &= A^n \cdot x_0 = 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1+2^n & 1-2^n & -1+2^n \\ 0 & 2 & 0 \\ -1+2^n & 1-2^n & 1+2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} (1+2^n)+(1-2^n)+2\,(-1+2^n) \\ 2 \\ (-1+2^n)+(1-2^n)+2\,(1+2^n) \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 2 \\ 2+2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2n} \\ 2^n \\ 2^n+2^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n \\ 2^n \\ 2^n+4^n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

also

$$u_n = 4^n, \qquad v_n = 2^n \qquad \text{und} \qquad w_n = 2^n + 4^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. Sei v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(v_1) = w_1 \ , f(v_2) = w_2 \ f(v_3) = w_3$$

a) Nehmen Sie an, dass w_1, w_2, w_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Geben Sie die darstellende Matrix bezüglich der Basen v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 an.

b) Sei nun

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$w_1 = e_1 \ , w_2 = e_2 \ w_3 = e_3$$

die kanonische Basis im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

a) *Bemerkung:* Die oben angegebene Abbildung ist wohldefiniert; dies ist das Prinzip der linearen Forsetzung: Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ ist $f(v)$ gegeben durch

$$f(v) = f(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) + \gamma f(v_3) = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3$$

wobei $v = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ die Darstellung von v in der Basis v_1, v_2, v_3 ist.
Nun benutzen Definition 7.23 um die darstellende Matrix bezüglich der Basen v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 anzugeben. Hierbei ist wichtig, dass w_1, w_2, w_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bezüglich dieser

beiden Basen ist wie folgt konstriert:
Sei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Die Spalten von M geben die *Zuordnungsvorschrift* von f an (immer bezogen auf die oben genannten Basen). Da $f(v_1) = w_1$ ist, wird der Basisvektor v_1 dem Vektor w_1 zugeordnet. Somit ist $a_{11} = 1, a_{21} = 0, a_{31} = 0$. Der *erste* Basisvektor v_1 wird einmal (=a_{11}) dem Basisvektor w_1 zugeordnet, 0-mal dem Basisvektor w_2 (=a_{21}) und 0-mal dem Basisvektor w_3 zugeordnet (=a_{31}). In der zweiten/dritten Spalte steht die Zuordnungsforschrift für den zweiten, bzw. dritten Basisvektor. Direktes Ablesen der Zuordnungsvorschrift ergibt

$$M = E_3$$

b) In Teilaufgabe a) haben wir schon gesehen, dass die lineare Abbildung f eindeutig bestimmt ist; und zwar durch ihre Wirkung auf die Basisvektoren v_1, v_2, v_3. In dieser Teilaufgabe sollen wir die darstellende Matrix bzgl. der kanonischen Basis angeben. Um diese darstellende Matrix angeben zu können, müssen wir $f(e_1), f(e_2)$ und $f(e_3)$ kennen. Sobald wir $f(e_1), f(e_2)$ und $f(e_3)$ kennen, können wir die darstellende Matrix *einfach ablesen.* Dies ist aber kein Problem, denn wir wissen ja, dass f eindeutig bestimmt ist und somit können wir für *jeden* Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ angeben, was $f(v)$ ist. Dazu müssen wir, wie schon in Teilaufgabe a) gesehen, v mit Hilfe der Basis v_1, v_2, v_3 darstellen. Durch scharfes Hinsehen (oder Lösen eines linearen Gleichungssystemes) erhalten wir

$$e_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3)\ , e_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 + v_3)\ , e_3 = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2 + v_3)$$

Damit ist

$$f(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3)\ , f(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3)\ , f(e_3) = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3)$$

Somit kann gemäß Definition 7.23 die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ *abgelesen* werden. Diese ist gegeben durch

$$M' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wie schon in der Vorlesung gezeigt, gilt weiterhin, dass M' (=die darstellende Matrix von f bzgl. der kanonischen Basis) *identisch* mit der Abbildungsmatrix von f ist, d.h.

$$f(x) = M'x$$

Dies ist wenig verwunderlich, da die i-te Spalte von M' (gemäß Konstruktion) durch $f(e_i)$, dargestellt in der kanonischen Basis, gegeben ist.

Mit Hilfe dieser Erkenntnis können wir Teilaufgabe b) auch alternativ lösen:
Die gesuchte Matrix M' ist, wie eben gesehen, sowohl die darstellende Matrix von f bzgl. der kanonischen Basis, als auch die Abbildungsmatrix von f. Damit gilt:

$$f(v) = M'v$$

für alle $v \in \mathbb{R}^3$. Somit ist auch

$$M'(v_1 v_2 v_3) = (e_1 e_2 e_3) = E_3$$

wobei $(v_1 v_2 v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine 3×3 Matrix ist, dessen Spaltenvektoren durch v_1, v_2 und v_3 gegeben sind. Dies ergibt

$$M' = (v_1 v_2 v_3)^{-1}$$

. Invertieren der Matrix $(v_1 v_2 v_3)$ ergibt wieder die gesuchte Matrix M'.