MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 11
15.07.2015

Lösung zum 11. Übungsblatt

1. Im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \circ)$ sei für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ die Abbildung $s_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $s_v(w) = w - 2(v \circ w)v$ definiert.

   (a) Zeigen Sie, dass s_v ein orthogonaler Endomorphismus ist.

   (b) Zeigen Sie, dass s_v eine Spiegelung darstellt. Geben Sie ebenfalls den Untervektorraum U an, an dem gespiegelt wird. $v_1, ..., v_n$ des $\mathbb{R}^n$ existiert, so dass $s_v(v_1) = -v_1$ und $s_v(v_i) = v_i$ für alle $i = 2, ..., n$ gilt.

   Lösung:

   (a) *Bemerkung:* Wir verwenden im Folgenden die Notation $\langle a, b\rangle = a \circ b$.
   Um zu zeigen, dass $s_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Endomorphismus ist, ist zu zeigen, dass für alle $w, u \in V$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaft gilt

$$s_v(\alpha w + u) = \alpha s_v(w) + s_v(u)$$

   Diese Eigenschaft kann durch direktes Einsetzen überprüft werden

$$\begin{aligned} s_v(\alpha w + u) =& \alpha w + u - 2\langle v, \alpha w + u\rangle v \\ =& \alpha\,(w - 2\langle v, w\rangle v) + u - 2\langle v, u\rangle v \\ =& \alpha s_v(w) + s_v(u) \end{aligned}$$

   Um zu zeigen, dass s_v orthogonal ist, ist zu zeigen, dass

$$\langle s_v(u), s_v(w)\rangle = \langle u, w\rangle \ , \forall u, w \in \mathbb{R}^n$$

   gilt. Diese Eigenschaft kann wiederrum durch direktes Einsetzen überprüft werden.

$$\begin{aligned} \langle s_v(u), s_v(w)\rangle =& \langle u - 2\langle v, u\rangle v, w - 2\langle v, w\rangle v\rangle \\ =& \langle u, w\rangle - \langle 2\langle v, u\rangle v, w\rangle - \langle u, 2\langle v, w\rangle v\rangle + \langle 2\langle v, u\rangle v, 2\langle v, w\rangle v\rangle \\ =& \langle u, w\rangle - 2\langle v, u\rangle\langle v, w\rangle - 2\langle v, w\rangle\langle u, v\rangle + 4\langle v, u\rangle\langle v, w\rangle\langle v, v\rangle \\ =& \langle u, w\rangle \end{aligned}$$

   (b) Als ersten Basisvektor können $v_1 = v$ auswählen. Es gilt $s_v(v) = -v$. Des Weiteren ist $\|v\| = 1$. Sei $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}v_1 \otimes U$ die Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ in die direkte Summe der zwei disjunkten Untervektorräume $\mathbb{R}v_1$ und U. Es gilt

$\dim(U) = n-1$. Als Basis von U wählen wir eine beliebige, geordnete Orthornormalbasis, welche wir mit $(v_2, ..., v_n)$ bezeichnen wollen. Somit ist $v_1, v_2, ..., v_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.
Des weiteren gilt, dass für $j \geq 2$ wegen $\langle v_1, v_j \rangle = 0$

$$s_v(v_j) = v_j$$

Daher stellt $s_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Spiegelung an dem Untervektorraum U dar.

2. *nach Staatsexamensaufgabe Herbst 2007*

Es sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die bijektive affine Abbildung mit

$$\psi(P_0) = (0,0,0)^t,\ \psi(P_1) = (1,0,0)^t,\ \psi(P_2) = (0,1,0)^t,\ \psi(P_3) = (0,0,1)^t.$$

wobei

$$P_0 := (1,1,1)^t,\ P_1 := (1,2,2)^t,\ P_2 := (2,3,2)^t \text{ und } P_3 := (-3,0,3)^t \in \mathbb{R}^3$$

ist. Finden Sie eine 3×3–Matrix A und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $\psi(x) = A \cdot x + b$.

Lösung:

Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} A \cdot P_0 + b &= \psi(P_0) = Q_0 \\ A \cdot P_1 + b &= \psi(P_1) = Q_1 \\ A \cdot P_2 + b &= \psi(P_2) = Q_2 \\ A \cdot P_3 + b &= \psi(P_3) = Q_3 \end{aligned}$$

sowie durch Differenzbildung dann

$$\begin{array}{lcl} A \cdot (P_1 - P_0) = Q_1 - Q_0, & \text{also} & A \cdot u_1 = e_1, \\ A \cdot (P_2 - P_0) = Q_2 - Q_0, & \text{also} & A \cdot u_2 = e_2, \\ A \cdot (P_3 - P_0) = Q_3 - Q_0, & \text{also} & A \cdot u_3 = e_3. \end{array}$$

Mit $B = (u_1, u_2, u_3) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $E_3 = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ erhält man also

$$A \cdot B = A \cdot (u_1, u_2, u_3) = (A \cdot u_1, A \cdot u_2, A \cdot u_3) = (e_1, e_2, e_3) = E_3$$

und folglich

$$A = B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie damit

$$b = Q_0 - A \cdot P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$