MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 10
10.07.2015

Lösung zum 10. Übungsblatt

1. a) Es ist

$$
\begin{aligned}
D_\varphi \cdot D_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi & -\cos\varphi\,\sin\psi - \sin\varphi\,\cos\psi \\ \sin\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi & -\sin\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = D_{\varphi+\psi}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
S_\varphi \cdot S_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi + \sin\varphi\,\sin\psi & \cos\varphi\,\sin\psi - \sin\varphi\,\cos\psi \\ \sin\varphi\,\cos\psi - \cos\varphi\,\sin\psi & \sin\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\psi) & -\sin(\varphi-\psi) \\ \sin(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) \end{pmatrix} = D_{\varphi-\psi}
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
D_\varphi \cdot S_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi & \cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi \\ \sin\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi & \sin\varphi\,\sin\psi - \cos\varphi\,\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & -\cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = S_{\varphi+\psi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_\varphi \cdot D_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi + \sin\varphi\,\sin\psi & -\cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi \\ \sin\varphi\,\cos\psi - \cos\varphi\,\sin\psi & -\sin\varphi\,\sin\psi - \cos\varphi\,\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\psi) & \sin(\varphi-\psi) \\ \sin(\varphi-\psi) & -\cos(\varphi-\psi) \end{pmatrix} = S_{\varphi-\psi}
\end{aligned}
$$

b) Jedes Produkt der Matrizen entspricht der Hintereinanderausführung der entsprechenden Drehung um den Ursprung bzw. Achsenspiegelung an einer Ursprungsgeraden; dabei gilt:

- Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen ist wieder eine Drehung; dabei addieren sich die beiden Drehwinkel auf.
- Die Hintereinanderausführung zweier Achsenspiegelung ist eine Drehung; dabei ist der Drehwinkel doppelt so groß wie der zwischen der ersten und der zweiten Achse eingeschlossene Winkel.
- Die Hintereinanderausführung einer Achsenspiegelung und anschließend einer Drehung ist wieder eine Achsenspiegelung; dabei ist die Spiegelungsachse um den halben Drehwinkel in mathematisch positiver Richtung gedreht.
- Die Hintereinanderausführung einer Drehung und anschließend einer Achsenspiegelung ist wieder eine Achsenspiegelung; dabei ist die Spiegelungsachse um den halben Drehwinkel in mathematisch negativer Richtung gedreht.

2. a) Eine orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = w$ bildet den zu v senkrechten Vektor $v^\perp = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ der Länge $\|v^\perp\| = \sqrt{50}$ auf einen zu w senkrechten Vektor x (wegen der Winkeltreue) der Länge $\|x\| = \sqrt{50}$ (wegen der Längentreue) ab; damit ist aber $f(v^\perp) = \pm w^\perp$ mit $w^\perp = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $f_1 = \ell_{A_1}$ mit

$$f_1(v) = w \qquad \text{und} \qquad f_1(v^\perp) = w^\perp$$

gilt $A_1 \cdot (v, v^\perp) = (A_1 \cdot v, A_1 \cdot v^\perp) = (w, w^\perp)$ und damit

$$A_1 = (w, w^\perp) \cdot (v, v^\perp)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

und für $f_2 = \ell_{A_2}$ mit

$$f_2(v) = w \qquad \text{und} \qquad f_2(v^\perp) = -w^\perp$$

gilt $A_2 \cdot (v, v^\perp) = (A_2 \cdot v, A_2 \cdot v^\perp) = (w, -w^\perp)$ und damit

$$A_2 = (w, -w^\perp) \cdot (v, v^\perp)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix};$$

man sieht sofort, daß A_1 und A_2 orthogonale Matrizen und folglich f_1 und f_2 orthogonale Abbildungen sind.

Alternativ kann man auch die allgemeine Gestalt

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

orthogonaler 2×2–Matrizen ansetzen und $\varphi \in \mathbb{R}$ so bestimmen, daß

$$D_\varphi \cdot v = w \qquad \text{bzw.} \qquad S_\varphi \cdot v = w$$

erfüllt ist. Für D_φ ergibt sich dabei

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{array}{rcrcr} 5\,\cos\varphi & - & 5\,\sin\varphi & = & 1 \\ 5\,\sin\varphi & + & 5\,\cos\varphi & = & -7 \end{array}$$

woraus man durch Addition der beiden Gleichungen

$$10\,\cos\varphi = -6, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = -\tfrac{3}{5},$$

sowie durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$-10\,\sin\varphi = 8, \qquad \text{also} \qquad \sin\varphi = -\tfrac{4}{5},$$

zusammen also

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

erhält; für S_φ ergibt sich dagegen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{array}{rcrcr} 5\,\cos\varphi & + & 5\,\sin\varphi & = & 1 \\ 5\,\sin\varphi & - & 5\,\cos\varphi & = & -7 \end{array}$$

woraus man durch Addition der beiden Gleichungen

$$10\,\sin\varphi = -6, \qquad \text{also} \qquad \sin\varphi = -\tfrac{3}{5},$$

sowie durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$10\,\cos\varphi = 8, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \tfrac{4}{5},$$

zusammen also

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

erhält. Man überprüft sofort, daß A_1 und A_2 orthogonale Matrizen und folglich f_1 und f_2 orthogonale Abbildungen sind, die v auf w abbilden.

b) Wegen $\det(A_1) = 1$ ist f_1 orientierungstreu; f_1 bildet ja das Rechtssystem $v, v^\perp$ auf das Rechtssystem $w, w^\perp$ ab. Die Abbildung f_1 beschreibt eine Drehung um den Ursprung, wobei für den Drehwinkel φ gilt $\cos\varphi = -\frac{3}{5}$.
Wegen $\det(A_2) = -1$ ist f_2 orientierungsumkehrend; f_2 bildet ja das Rechtssystem $v, v^\perp$ auf das Linkssystem $w, -w^\perp$ ab. Die Abbildung f_2 beschreibt eine Achsenspiegelung mit der Spiegelachse $\mathbb{R} \cdot a = \mathrm{Eig}(A_2; 1)$; wegen

$$A - E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{9}{5} \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\cdot(-5)}{\overset{\mathrm{I}\cdot(-5)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist etwa $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Wir zeigen zunächst, daß es höchstens eine Drehung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(v_1) = v_2 \qquad \text{und} \qquad \varphi(v_2) = v_3$$

geben kann, wobei v_1, v_2, v_3 die gegebene Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist. Aufgrund der Winkeltreue der orthogonalen Abbildung φ erhält man

$$\begin{array}{rcl} v_3 \perp v_1 & \Longrightarrow & \varphi(v_3) \perp \varphi(v_1) = v_2 \\ v_3 \perp v_2 & \Longrightarrow & \varphi(v_3) \perp \varphi(v_2) = v_3 \end{array}$$

und damit $\varphi(v_3) = \lambda \cdot v_1$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei sich aufgrund ihrer Längentreue

$$1 = \|v_3\| = \|\varphi(v_3)\| = \|\lambda \cdot v_1\| = |\lambda| \cdot \|v_1\| = |\lambda| \cdot 1 = |\lambda|\,,$$

also $\lambda = \pm 1$, ergibt; für das Vorzeichen liefert die Orientierungstreue von φ dann

$$\begin{aligned} \det(v_1,\ v_2,\ v_3) &= \det(\varphi(v_1),\ \varphi(v_2),\ \varphi(v_3)) = \det(v_2,\ v_3,\ \lambda \cdot v_1) = \\ &= \lambda \cdot \det(v_2,\ v_3,\ v_1) = -\lambda \cdot \det(v_2,\ v_1,\ v_3) = \lambda \cdot \det(v_1,\ v_2,\ v_3)\,, \end{aligned}$$

wegen $\det(v_1,\ v_2,\ v_3) \neq 0$ also $\lambda = 1$. Durch ihre Wirkung

$$\varphi(v_1) = v_2, \quad \varphi(v_2) = v_3 \qquad \text{und} \qquad \varphi(v_3) = v_1$$

auf der (Orthonormal–)Basis $v_1,\ v_2,\ v_3$ von $\mathbb{R}^3$ ist nun die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ schon eindeutig bestimmt.

Wir weisen nun nach, daß die einzige in Frage kommende lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(v_1) = v_2, \quad \varphi(v_2) = v_3 \qquad \text{und} \qquad \varphi(v_3) = v_1$$

tatsächlich die gewünschten Eigenschaften besitzt. Wegen

$$\begin{array}{rcl} \varphi(v_1) = v_2 & = & 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ \varphi(v_2) = v_3 & = & 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 \\ \varphi(v_3) = v_1 & = & 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \end{array}$$

ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die darstellende Matrix von φ bezüglich der Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 von $\mathbb{R}^3$. Wegen

$$M^\top \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

ist die Matrix M orthogonal, so daß φ wegen

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0 + 0 + 1) - (0 + 0 + 0) = 1$$

eine Drehung des euklidischen $\mathbb{R}^3$ beschreibt. Für den Drehwinkel α von φ ergibt sich schließlich

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{Spur}(M)-1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

(Diese Informationen lassen sich aus der darstellenden Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 ebenso gewinnen wie aus ihrer Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ selbst: mit der orthogonalen Matrix $P = (v_1, v_2, v_3) \in \mathrm{O}_3$ ergibt sich nämlich für den Basiswechsel

$$M = P^{-1}AP = P^\top AP \qquad \text{bzw.} \qquad A = PMP^{-1} = PMP^\top,$$

so daß mit M dann auch A (als Produkt orthogonaler Matrizen) orthogonal ist; ferner sind A und M zueinander ähnliche Matrizen und besitzen daher dieselbe Determinante und dieselbe Spur.)

4. Für jeden Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bestimmen wir die Koordinaten des Bildvektors $f(x) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ unter dem Endomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) \circ y = \det(x, y) \qquad \text{für alle} \quad y \in \mathbb{R}^2,$$

so daß sich speziell für die beiden Einheitsvektoren e_1 und e_2

$$x_1' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x) \circ e_1 = \det(x, e_1) = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} = -x_2$$

sowie

$$x_2' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f(x) \circ e_2 = \det(x, e_2) = \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

ergibt. Wegen

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = D_{\frac{\pi}{2}} \cdot x$$

beschreibt f die Drehung (mit dem Ursprung als Drehzentrum) um den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$; es ist also $\cos\alpha = 0$.