MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 1
25.04.2015

# Lösungsvorschlag für das erste Übungsblatt

1. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 1999).*

Gegeben sei die Abbildung $\ell_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 40 & 110 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Man bestimme eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes von $f$. Man untersuche, ob $f$ injektiv bzw. surjektiv ist.

**Lösung:**

Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 40 & 110 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-4\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & -12 & 24 & 94 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+12\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-3\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 28 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-4\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}+14\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

Damit erhält man:

- $\mathrm{Kern}(\ell_A)$ ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit der freien Unbestimmten $x_3$; demnach bildet

$$b_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(\ell_A)$. Wegen $\mathrm{Kern}(\ell_A) \neq \{0\}$ ist $\ell_A$ nicht injektiv.

- $\mathrm{Bild}(\ell_A)$ ist der Spaltenraum der Matrix $A$. Da $x_1$, $x_2$ und $x_4$ die gebundenen Unbestimmten von $A \cdot x = 0$ sind, bilden $s_1'$, $s_2'$, $s_4'$ eine Basis des Spaltenraums von $A'$ und dementsprechend

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 110 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}(\ell_A)$. Wegen $\dim \mathrm{Bild}(\ell_A) = \mathrm{Rang}(A) = 3$ ist $\ell_A$ surjektiv.

2. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1995).*

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f = \ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

a) Man berechne $\text{Kern}(f)$ und den Rang von $A$.

b) Sei $U$ der von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix}$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Man gebe eine Basis von $f(U)$ an.

c) Man gebe einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ an, der nicht in $\text{Bild}(f)$ liegt.

**Lösung:**

a) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -8 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

Damit ist $\text{Rang}(A) = 2$ sowie

$$\text{Kern}(f) = \{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\lambda \\ \frac{4}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R} \cdot u \quad \text{mit} \quad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist

$$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \qquad \text{mit} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \;\; \text{und} \;\; u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Wegen $u_3 = 2 \cdot u_1 + u_2$ gilt sogar

$$U = \langle u_1, u_2 \rangle$$

und damit

$$f(U) = \langle f(u_1), f(u_2) \rangle.$$

Ferner ist $u_2 = u_1 + u$ mit $u \in \text{Kern}(f)$ und folglich

$$f(u_2) = f(u_1) + f(u) = f(u_1),$$

womit sich $f(U) = \langle f(u_1) \rangle$ ergibt. Schließlich erhält man wegen

$$f(u_1) = A \cdot u_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} = (-9) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

also $f(U) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Da der Spaltenraum von $A'$ von den ersten beiden Spalten von $A'$ erzeugt wird, erzeugen auch die ersten beiden Spalten $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ von $A$ den Spaltenraum von $A$, also $\mathrm{Bild}(f)$. Für alle Elemente $b \in \mathrm{Bild}(f)$ gilt damit $2\,b_1 = b_4$; damit können etwa die beiden Einheitsvektor $e_1$ und $e_4$ nicht in $\mathrm{Bild}(f)$ liegen.

3. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).*

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$–Vektorraum der Polynome $p(X)$ vom $\mathrm{Grad}(p) \leq n$ mit reellen Koeffizienten. Betrachtet werde die Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad p \mapsto p' - (X+1) \cdot p''.$$

Dabei bezeichne $p'$ bzw. $p''$ die erste bzw. zweite Ableitung des Polynoms $p$.

a) Zeigen Sie, dass $f$ linear ist.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M$ von $f$ bezüglich der Standardbasen $1$, $X$, $X^2$, $X^3$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und $1$, $X$, $X^2$ von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

c) Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ sowie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

**Lösung:**

a) Für alle $p$, $q \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} f(p+q) &= (p+q)' - (X+1) \cdot (p+q)'' \\ &= (p'+q') - (X+1) \cdot (p''+q'') \\ &= (p'+q') - ((X+1) \cdot p'' + (X+1) \cdot q'') \\ &= (p' - (X+1) \cdot p'') + (q' - (X+1) \cdot q'') \\ &= f(p) + f(q); \end{aligned}$$

damit ist $f$ additiv; ferner gilt für alle $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot p) &= (\lambda \cdot p)' - (X+1) \cdot (\lambda \cdot p)'' \\ &= \lambda \cdot p' - (X+1) \cdot (\lambda \cdot p'') \\ &= \lambda \cdot (p' - (X+1) \cdot p'') \\ &= \lambda \cdot f(p); \end{aligned}$$

damit ist $f$ auch homogen, insgesamt also linear.

b) Wegen

$$\begin{array}{rcrcrrr} f(1) & = & 0-(X+1)\cdot 0 & = & 0\cdot 1+ & 0\cdot X+ & 0\cdot X^2\\ f(X) & = & 1-(X+1)\cdot 0 & = & 1\cdot 1+ & 0\cdot X+ & 0\cdot X^2\\ f(X^2) & = & 2X-(X+1)\cdot 2 & = & (-2)\cdot 1+ & 0\cdot X+ & 0\cdot X^2\\ f(X^3) & = & 3X^2-(X+1)\cdot 6X & = & 0\cdot 1+ & (-6)\cdot X+ & (-3)\cdot X^2 \end{array}$$

ist

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 4}$$

die darstellende Matrix von $f$ bezüglich der Basen $1$, $X$, $X^2$, $X^3$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und $1$, $X$, $X^2$ von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

c) Wegen

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\underset{-\frac{1}{6}\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}\underset{\mathrm{III}+3\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad u_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}\,(\ell_M)$ sowie

$$s_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad s_4=\begin{pmatrix}0\\-6\\-3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}\,(\ell_M)$; damit ist

$$\begin{array}{rcl} 1\cdot 1+0\cdot X+0\cdot X^2+0\cdot X^3 & = & 1,\\ 0\cdot 1+2\cdot X+1\cdot X^2+0\cdot X^3 & = & 2X+X^2 \end{array}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)\subseteq\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ sowie

$$\begin{array}{rcl} 1\cdot 1+0\cdot X+0\cdot X^2 & = & 1,\\ 0\cdot 1-6\cdot X-3\cdot X^2 & = & -6X-3X^2 \end{array}$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)\subseteq\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

4. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).*

In Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2c-1 \\ 1-c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sowie

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

gegeben.

a) Man bestimme in Abhängigkeit von $c$ die Dimension des von $v_1$, $v_2$, $v_3$ aufgespannten Unterraums von $\mathbb{R}^3$.

b) Man untersuche, für welche Werte von $c$ es

(i) keine, (ii) genau eine, (iii) mehr als eine

lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$ gibt.

c) Nun sei $c = 0$ sowie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$. Man bestimme die Dimension von $\operatorname{Bild}(f)$ und untersuche, ob $f$ injektiv bzw. surjektiv ist.

**Lösung:**

a) Für die Matrix $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2c-1 \\ 0 & 2 & 1-c \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2(c-1) \\ 0 & 2 & 1-c \end{pmatrix} \underset{\text{III}+2\text{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2(c-1) \\ 0 & 0 & 3(c-1) \end{pmatrix};$$

damit ist

$$\dim\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \operatorname{Rang}(B) = \begin{cases} 3, & \text{falls } c \neq 1, \\ 2, & \text{falls } c = 1. \end{cases}$$

b) Im Hinblick auf a) treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für den Fall $c \neq 1$ bilden die drei Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$ gemäß a) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ und damit schon eine Basis von $\mathbb{R}^3$; folglich gibt es dann nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$.
- Für den Fall $c = 1$ sind die drei Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$ von $\mathbb{R}^3$ linear abhängig, es gilt hier sogar $v_1 = v_3$; wegen $w_1 \neq w_3$ kann es überhaupt keine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_3) = w_3$ geben, insbesondere existiert damit auch keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$.

c) Für $c = 0$ gibt es gemäß b) genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$. Dabei erhält man für die Matrix $C = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ wegen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{III}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-2\text{II}}{\overset{\text{III}+2\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+\frac{3}{5}\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

dann $\text{Rang}(C) = 3$; damit sind die Vektoren $w_1$, $w_2$, $w_3$ linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$, weswegen die lineare Abbildung $f$ zwar injektiv, aber nicht surjektiv ist.

**Abgabe:** Freitag, den 08. Mai 2015, $16^{15}$ Uhr
Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Übungskasten der Vorlesung ein.