MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 9
19.06.2015

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. Für jede der beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

bestimme man eine orthogonale Matrix, die diese diagonalisiert.

2. a) Man zeige, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die Eigenwerte -3, -1 und 3 besitzt, und bestimme ein $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ mit

$$P^\top A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Man zeige, daß

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

den Eigenwert 4 besitzt, und bestimme eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von B.

3. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).*

a) Man zeige: Für jede symmetrische reelle Matrix A mit $A^4 = A$ gilt $A^2 = A$.

b) Man gebe eine reelle quadratische Matrix A mit $A^4 = A$ und $A^2 \neq A$ an.

4. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2001).* Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Man zeige, daß -1 ein Eigenwert von B ist, und bestimme eine Basis für den zugehörigen Eigenraum E.

b) Sei $0 \neq n \in \mathbb{R}^4$ ein (bezüglich des Standardskalarprodukts) zu E orthogonaler Vektor. Man bestimme $B \cdot n$ und folgere daraus, daß B das charakteristische Polynom $\chi_B(\lambda) = (\lambda+1)^3\,(\lambda-3)$ besitzt.

c) Man bestimme für alle a, $b \in \mathbb{R}$ die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

Abgabe bis Freitag, den 03. Juli 2015, 16^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).