MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 8
12.06.2015

Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   a) Man zeige, daß σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

   b) Man bestimme bezüglich σ_A die Längen der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sowie die von ihnen eingeschlossenen Winkel.

   c) Man berechne eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma_A)$.

   d) Man gebe eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit $A = P^\top P$ an.

2. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).* Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

   gegeben; ferner sei $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ der von v_1, v_2 und v_3 aufgespannte Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

   a) Man zeige, daß v_1, v_2 eine Basis von U ist, und stelle v_3 als Linearkombination von v_1 und v_2 dar.

   b) Man ergänze v_1, v_2 zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

   c) Man bestimme (bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$) eine Orthonormalbasis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U.

3. *(nach Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001).*

   a) Man untersuche die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   auf Diagonalisierbarkeit und begründe jeweils das Ergebnis.

4. *(nach Staatsexamensaufgabe Herbst 2002).* Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = A\,x$, die lineare Abbildung des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^2, \circ)$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   a) Man zeige, daß genau dann $(*)$ $f(x) \perp x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt, wenn für die Koeffizienten $a_{11} = a_{22} = 0$ und $a_{12} + a_{21} = 0$ erfüllt ist.

   b) Man bestimme alle linearen Abbildungen f mit $(*)$ und $f\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

Abgabe: Freitag, den 26. Juni 2015, 16^{15} Uhr
Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Übungskasten der Vorlesung ein.