MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 7
08.06.2015

Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. Für $c \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & c \\ -1 & 2 & 0 \\ c & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben.

   a) Man bestimme alle $c \in \mathbb{R}$, für die σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

   b) Für $c = 1$ bestimme man bezüglich σ_A die Längen der drei Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sowie die von ihnen eingeschlossenen Winkel.

   c) Für die Hauptuntermatrix $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von A bestimme man eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $P^\top P = A_2$.

2. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1997).* Für den reellen Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $A_s = \begin{pmatrix} 1+s & 1-s & -1 \\ 1-s & 5+s & -3 \\ -1 & -3 & 3-4\,s^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben.

   a) Man ermittle für jedes $s \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A_s \cdot x = 0$.

   b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist die symmetrische Matrix A_s positiv definit?

3. Für den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachte man die durch

$$\sigma(A, B) = \mathrm{Spur}(A\,B) \qquad \text{und} \qquad \tau(A, B) = \mathrm{Spur}(A^\top B) \qquad \text{für } A,\ B \in V$$

   definierten Abbildungen $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ und $\tau : V \times V \to \mathbb{R}$. (*Hinweis:* Die Definition der Spur finden Sie im Skript, Satz 8.8)

   a) Man zeige, daß σ und τ symmetrische Bilinearformen auf V sind.

   b) Man überprüfe, ob σ und τ Skalarprodukte auf V sind.
   Hinweis: σ ist kein Skalarprodukt auf V; finden Sie daher eine möglichst einfache Matrix $A \in V$, so dass $\sigma(A, A) < 0$ ist. τ ist ein Skalarprodukt auf V. Um dies zu beweisen, betrachten Sie zuerst den Fall $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und beweisen Sie für eine allgemeine Matrix $A \in V$, $A \neq 0$, dass $\tau(A, A) > 0$ gilt. Der Fall $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ ist nach dieser Vorüberlegung analog beweisbar.

4. Sei (V, σ) ein euklidischer Vektorraum. Man zeige für alle $v,\, w \in V$:

   a) $\sigma(v, w) = \frac{1}{4}\,\|v + w\|^2 - \frac{1}{4}\,\|v - w\|^2$

   b) $2\,(\|v\|^2 + \|w\|^2) = \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2$ *(Parallelogrammgleichung)*

   c) $v \perp w \iff \|v + w\| = \|v - w\|$

   d) $\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \iff w = 0$ oder $v = \lambda\, w$ für ein $\lambda \geq 0$

Abgabe: Freitag, den 19. Juni 2015, 16^{15} Uhr
Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Übungskasten der Vorlesung ein.