MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 6
31.05.2015

Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. a) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

betrachte man die Bilinearform $\sigma_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und bestimme $\sigma_A(x,y) = x^\top A y$ allgemein für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

b) Man gebe für die Bilinearformen

- $\sigma_1(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3 - x_1\,y_3 - x_3\,y_1$,
- $\sigma_2(x,y) = x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + 3\,x_3\,y_3 + 4\,x_1\,y_2 + 5\,x_1\,y_3 + 6\,x_2\,y_3$,
- $\sigma_3(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 - x_1\,y_2 + x_1\,y_3 - x_2\,y_3$,
- $\sigma_4(x,y) = x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + x_3\,y_3 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + x_2\,y_3 + x_3\,y_2$

des $\mathbb{R}^3$ die entsprechenden Matrizen A_1, A_2, A_3, $A_4 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß a) an.

c) Befindet sich unter den bei b) betrachteten Bilinearformen auch ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$?

2. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000*

Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei die Bilinearform

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

gegeben. Zeigen Sie, dass diese Bilinearform ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert.

3. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2009*

   Zeigen Sie: Es gibt kein Skalarprodukt $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bezüglich dessen gleichzeitig

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{gilt.}$$

   Hierbei bezeichnet $a \perp b$, dass $\psi(a,b) = 0$ gilt.
   Hinweis: Bestimmen Sie dazu eine symmetrische Bilinearform ψ auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$\psi\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 0, \qquad \psi\left(\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right) = 0$$

   und prüfen Sie, ob diese ein Skalarprodukt ist. Erinnern Sie sich, dass ψ durch die Angabe einer 2×2 Matrix A eindeutig bestimmt ist. Geben Sie also alle möglichen Matrizen A an, so dass $x^T A y = \psi(x,y)$ gilt. Zeigen Sie nun, dass A nicht positiv definit ist.

4. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007* Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei die Basis

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

   gegeben.

   a) Man bestimme die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$f : V \to V, \quad f(A) = A \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

      bezüglich der Basis A_1, A_2, A_3, A_4.

   b) Entscheiden Sie, ob f diagonalisierbar ist.

Abgabe: Freitag, den 12. Juni 2015, 16^{15} Uhr
Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Übungskasten der Vorlesung ein.