MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 5
23.05.2015

Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007*

   In Abhängigkeit vom reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

   $$A_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ t & t+1 & 0 \\ t+1 & t+1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   gegeben.

   a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom χ_t von A_t gegeben ist durch

   $$\chi_t(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-t)(\lambda-1).$$

   b) Untersuchen Sie A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ auf Diagonalisierbarkeit.

   c) Nun sei $t = 0$. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^{-1}A_0P = D$.

2. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2011*

   Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   a) Es gibt eine Basis v_1, v_2, v_3, v_4 des $\mathbb{R}^4$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -17 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix}$.

   b) Jede diagonalisierbare Matrix ist invertierbar.

   c) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.
   Hinweis: Widerlegen Sie diese Aussage durch die Angabe eines möglichst einfachen Gegenbeispieles.

   d) Sei A eine Matrix mit $A^3 = A$. Dann sind die einzig möglichen Eigenwerte von A gleich 0 oder ± 1.

3. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007*

   Es sei V ein 4–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum mit der Basis v_1, v_2, v_3, v_4. Weiter sei $\varphi : V \to V$ die lineare Abbildung mit

   $$\varphi(v_1) = v_2, \quad \varphi(v_2) = v_3, \quad \varphi(v_3) = v_4, \quad \varphi(v_4) = v_1.$$

Berechnen Sie Basen für die Eigenräume von φ in V und entscheiden Sie, ob φ reell diagonalisierbar ist.
Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die darstellende Matrix von φ bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von V.

4. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013*

   Man betrachte den von den vier Vektoren

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   aufgespannten Untervektorraum $V = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^3$.

   a) Man zeige, dass v_1, v_2 eine Basis von V ist, und stelle w_1 und w_2 als Linearkombinationen von v_1, v_2 dar.

   b) Man begründe, dass es genau einen Endomorphismus $f : V \to V$ von V mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$ gibt, und gebe die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 von V an.
   Hinweis: Welche Dimension hat V?

   c) Man zeige, dass f diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.

Abgabe: Freitag, den 05. Juni 2015, 16^{15} Uhr
Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Übungskasten der Vorlesung ein.