MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 2
03.05.2015

Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{in } \mathbb{R}^3$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{in } \mathbb{R}^2$$

sowie die Matrix $A_1 = \begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\3 & 1 & -1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

a) Man zeige, daß v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und w_1, w_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, und bestimme die darstellende Matrix von $\ell_{A_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser beiden Basen.

b) Warum gibt es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$? Man bestimme zudem eine Matrix $A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f = \ell_{A_2}$.

c) Man bestimme eine Matrix $A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ derart, daß für die lineare Abbildung $g = \ell_{A_3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sowohl $\mathrm{Kern}(g) = \mathbb{R}\, w_1$ als auch $\mathrm{Bild}(g) = \mathbb{R}\, v_1$ gilt.

2. *Nach Staatsexamensaufgabe Herbst 2004*

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$S = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und bestimmen Sie S^{-1}.

b) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$f(a_1) = a_2, \qquad f(a_2) = a_3 \qquad f(a_3) = a_1,$$

und bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

c) Geben Sie mit Hilfe der in Teilaufgabe b) angegebenen Abbildungsvorschrift einen Eigenvektor mit zugehörigem Eigenwert an.

3. *Staatsexamen Frühjahr 2014*

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A\,x$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Gegeben seien weiterhin die drei Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix B von f bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 (Sie können auch das Ergebnis aus dem Tutoriumsblatt 3 übernehmen).

b) Berechnen Sie B^n für alle $n \in \mathbb{N}$ und bestimmen Sie daraus A^n.

c) Die reellen Folgen (u_n), (v_n), (w_n) seien durch folgende Rekursionsformeln definiert: $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 2$ und für alle $n \geq 0$ sei

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3\,u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &= 2\,v_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n + 3\,w_n \end{aligned}$$

Berechnen Sie u_n, v_n, w_n für $n \in \mathbb{N}$.

4. Sei v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(v_1) = w_1\ , f(v_2) = w_2\ f(v_3) = w_3$$

a) Nehmen Sie an, dass w_1, w_2, w_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Geben Sie die darstellende Matrix bezüglich der Basen v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 an.

b) Sei nun

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$w_1 = e_1\ , w_2 = e_2\ w_3 = e_3$$

die kanonische Basis im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Abgabe: Freitag, den 15. Mai 2015, 16^{15} Uhr
Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Übungskasten der Vorlesung ein.