MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 10
26.06.2015

Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)"

1. a) Sei
$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$
Man bestimme unter Verwendung der Additionstheoreme
$$\begin{aligned} \cos(\varphi \pm \psi) &= \cos\varphi\,\cos\psi \mp \sin\varphi\,\sin\psi \\ \sin(\varphi \pm \psi) &= \sin\varphi\,\cos\psi \pm \cos\varphi\,\sin\psi \end{aligned}$$
die Matrizen $D_\varphi \cdot D_\psi$ und $S_\varphi \cdot S_\psi$ sowie $D_\varphi \cdot S_\psi$ und $S_\varphi \cdot D_\psi$ für $\varphi,\ \psi \in \mathbb{R}$.

   b) Man interpretiere die Ergebnisse von a) geometrisch.

2. Im euklidischen $(\mathbb{R}^2, \circ)$ seien $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Man bestimme alle orthogonalen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = w$ und gebe die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $f = \ell_A$ an.

   b) Welche geometrische Bedeutung besitzen die in a) ermittelten Abbildungen?

3. *Staatsexamensaufgabe Herbst 2008*

   Es sei $v_1,\ v_2,\ v_3 \in \mathbb{R}^3$ eine Orthonormalbasis. Zeigen Sie, dass es genau eine Drehung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gibt mit
$$\varphi(v_1) = v_2 \qquad \text{und} \qquad \varphi(v_2) = v_3.$$
Bestimmen Sie den Cosinus des Drehwinkels von φ.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für die orthogonale Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi(v_3) = \pm v_1$ gelten muss. Zeigen Sie weiterhin, dass $\varphi(v_3) = v_1$ gilt, da es sich bei φ um eine Spiegelung handelt. Den Cosinus des Drehwinkels erhalten Sie mit Hilfe der „Spur-Formel ".

4. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 1990).* Der Endomorphismus f des euklidischen $\mathbb{R}^2$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$) habe die Eigenschaft
$$f(x) \circ y = \det(x, y) \qquad \text{für alle} \quad x,\ y \in \mathbb{R}^2.$$
Man beweise, daß f eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ ist, und berechne den Drehwinkel.
Hinweis: Mit Hilfe von $f(x) \circ y = \det(x, y)$ können Sie $f(x)$ eindeutig bestimmen.

Abgabe bis Freitag, den 10. Juli 2015, 16^{15} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).