MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 1
25.04.2015

Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)"

1. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 1999).*

   Gegeben sei die Abbildung $\ell_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 40 & 110 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Man bestimme eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes von f. Man untersuche, ob f injektiv bzw. surjektiv ist.

2. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 1995).*

   Gegeben sei die lineare Abbildung

   $$f = \ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}.$$

   a) Man berechne Kern(f) und den Rang von A.

   b) Sei U der von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix}$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Man gebe eine Basis von $f(U)$ an.

   c) Man gebe einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ an, der nicht in Bild(f) liegt.

3. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).*

   Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$–Vektorraum der Polynome $p(X)$ vom Grad$(p) \leq n$ mit reellen Koeffizienten. Betrachtet werde die Abbildung

   $$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad p \mapsto p' - (X+1) \cdot p''.$$

   Dabei bezeichne p' bzw. p'' die erste bzw. zweite Ableitung des Polynoms p.

   a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

   b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix M von f bezüglich der Standardbasen 1, X, X^2, X^3 von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und 1, X, X^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

   c) Berechnen Sie eine Basis von Kern(f) sowie eine Basis von Bild(f).

4. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).*

In Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2c-1 \\ 1-c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sowie

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

gegeben.

a) Man bestimme in Abhängigkeit von c die Dimension des von v_1, v_2, v_3 aufgespannten Unterraums von $\mathbb{R}^3$.

b) Man untersuche, für welche Werte von c es

(i) keine, (ii) genau eine, (iii) mehr als eine

lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$ gibt.

c) Nun sei $c = 0$ sowie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = w_3$. Man bestimme die Dimension von $\mathrm{Bild}(f)$ und untersuche, ob f injektiv bzw. surjektiv ist.

Abgabe: Freitag, den 08. Mai 2015, 16^{15} Uhr

Bitte werfen Sie Ihre Lösung in den Übungskasten der Vorlesung ein.