Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer, Thomas Jahn

Sommersemester 2015
10. Juli 2015

Lineare Algebra 2 – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Wir zeigen zuerst die Richtung von a) nach b), also können wir annehmen, das gilt $V = \bigoplus_{i=1}^k W_k$, wobei wir hier voraussetzen, dass wir eine orthogonale direkte Summe haben. Sei $v \in V$ dann gibt es also eine eindeutige Darstellung

$$v = \sum_j \alpha_j w_j$$

mit $w_j \in W_j$ und $(w_i, w_j) = 0$ für $i \neq j$. Sei B_j eine Orthonormalbasis von W_j und sei $B = \bigcup_j B_j$. V wird also offensichtlich von B erzeugt. Da B eine orthonormale Menge ist, ist B linear unabhängig (das ist Lemma 17.9) und somit auch eine Orthonormalbasis von V.
Nun wollen wir die Richtung von b) nach a) zeigen. Wir können also annehmen, dass $B_j = \{b_{1,j}, \dots, b_{n_j,j}\}$ eine Orthonormalbasis der W_j ist und $\bigcup_j B_j$ eine Orthonormalbasis von V. Also kann ein beliebiger Vektor $v \in V$ dargestellt werden als

$$v = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i \in I_j} \alpha_{i,j} b_{i,j},$$

wobei $I_j = \{1, \dots, n_j\}$. Definieren wir nun $v_j := \sum_{i \in I_j} \alpha_{i,j} b_{i,j}$, ist $v = \sum_{j=1}^k v_j$ und die v_j stehen orthogonal aufeinander, da $(v_\ell, v_m) = 0$ für $\ell \neq m$, weil v_ℓ und v_m nur aus Basisvektoren bestehen die selbst eine Orthonormalbasis bilden und wir die Linearität des Skalarprodukts ausnutzen können. Es ist auch klar, dass $W_s \cap W_r = \{0\}$ gilt. Denn gäbe es ein $v \neq 0$, das im Schnitt von beiden liegt, könnte man das sofort zum Widerspruch zur Aussage, dass $\bigcup_{j=1}^k B_j$ eine (orthonormal) Basis ist, führen.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Zuerst stellen wir für die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2z \\ 0 \\ -2x + 4z \end{pmatrix}.$$

die dazugehörige darstellende A bezüglich der Standardbasisvektoren auf und erhalten die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann berechnen wir das charakteristische Polynom $\chi_A = x^2(x-5)$. Danach berechnen wir die Eigenräume und erhalten:

$$V(5) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \right\rangle V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Man sieht sofort, dass diese drei erzeugenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von f bilden. Mit Theorem 22.4 (gibt uns, dass $V(5) \oplus V(0)$ eine orthogonale direkte Summe bildet) und mithilfe einer einfachen Rechnung für die beiden Basisvektoren des $V(0)$ können wir folgern, dass die drei Vektoren der Basis aus Eigenvektoren ein Orthogonalsystem bilden. Normalisierung liefert uns dann ein Orthonormalbasis

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte).

a) Es gilt $A = A^t$, also wissen wir aus der Vorlesung, dass es eine orthogonale Matrix U gibt mit

$$U^t A U = D = \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_k P_k$$

wobei $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_k)$ und P_i die Diagonalmatrizen mit den entsprechenden Nullen und Einsen auf der Diagonalen. Daraus folgt, dass

$$A = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i U P_i U^t.$$

gilt. Wir müssen nun nur mehr definieren $\mathcal{E}_i := U P_i U^t$.

b) Wir wollen nun zeigen, dass $\mathcal{E}_i$ eine Projektion auf $V(\alpha_i)$ ist. Wir berechnen

$$\mathcal{E}_i^2 = U P_i U^t U P_i U^t = U P_i U^t = U P_i U^t = \mathcal{E}_i,$$

für $i \neq j$, also gilt $A\,\mathcal{E}_i(v) = \alpha_i\,\mathcal{E}_i\,v$ und somit ist $\mathcal{E}_i$ eine Projektion auf $V(\alpha_i)$.

c) Wir wollen zeigen, dass $E_n = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{E}_i$. Mit $P_1 + \ldots + P_k = E_n$ per Konstruktion der P_i und $U^{-1} = U^t$ können wir schließen:

$$\mathcal{E}_1 + \ldots + \mathcal{E}_k = U(P_1 + \ldots + P_k)U^t = UU^t = E_n.$$

d) Wir wollen zeigen, dass gilt $\ker(\mathcal{E}_i) = V(\alpha_i)^\perp$. Aus einer Übungsaufgabe der Linearen Algebra 1, dass gilt $V = \ker(\mathcal{E}_i) \oplus \operatorname{im}(\mathcal{E}_i)$, weil P_i eine Projektion ist. Außerdem gilt mit dem oben gezeigtem $\operatorname{im}(\mathcal{E}_i) = V(\alpha_i)$ und $V = V(\alpha_i) \oplus V(\alpha_i)^\perp$ nach Vorlesung. Also folgt auch $\ker(\mathcal{E}_i) = V(\alpha_i)^\perp$.

Aufgabe 4 (6 Punkte).

a) Wir bezeichnen zusätzlich den Homomorphismus $0 \to A$ mit γ. Sei $\varphi : A \to B$ injektiv. Dann ist $\mathrm{im}(\gamma) = 0$, da γ ein Homomorphismus ist und $\ker(\varphi) = 0$, da φ injektiv. Somit gilt $\mathrm{im}(\gamma) = \ker(\varphi)$ und die angegebene Sequenz ist exakt. Sei andererseits die angegebene Sequenz exakt, dann gilt $\ker(\varphi) = \mathrm{im}(\gamma) = 0$ was sofort aus der Definition eines Homomorphismus folgt und somit ist φ injektiv.
Wir bezeichnen nun den Homomorphismus $C \to 0$ mit δ. Sei nun $\psi : B \to C$ surjektiv. Dann gilt per Definition $\mathrm{im}(\psi) = C$, aber für den Kern des Nullhomomorphismus gilt $\ker(\delta) = C$, also folgt $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(\delta)$ und somit ist die zweite angegebene Sequenz exakt. Sei umgekehrt die angegebene Sequenz exakt. Dann gilt $\ker(\delta) = \mathrm{im}(\psi)$ aber $\ker(\delta) = C$ (Kern des Nullhomomorphismus) und somit ist ψ surjektiv.

b) Sei $\varphi : A \to B$ injektiv. Wir wollen nun zeigen, dass der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi^* : B^* &\to A^* \\ f &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

surjektiv ist, das heißt, für ein $g \in A^*$ existiert ein $h \in B^*$ mit $g = h \circ \varphi$. Zuerst stellen wir die Abbildung ϕ als die Komposition natürlichen Abbildung auf ihr Bild und einer Inklusion nach B dar:

$$\varphi : A \xrightarrow{\varphi'} \mathrm{im}(\varphi) \xrightarrow{\varphi''} B.$$

Da φ injektiv ist, muss φ' ein Isomorphismus sein. Wir erhalten also einen wohldefinierten Homomorphismus $g' : \mathrm{im}(\varphi) \to k$ durch $g' := g \circ (\varphi')^{-1}$.
Da $\mathrm{im}(\varphi)$ ein Unterraum von B ist, finden wir ein direktes Komplement B' so dass gilt $B = B' \oplus \mathrm{im}(\varphi)$. Also können wir jedes $b \in B$ eindeutig darstellen als $b = b_1 + b_2$ mit $b_1 \in B'$ und $b_2 \in \mathrm{im}(\varphi)$. Setzen wir nun $h(b) := g'(b_2)$ haben wir also genau eine Abbildung gefunden für die gilt $g = h \circ \varphi$, was zu zeigen war.

c) Sei nun $\psi : B \to C$ surjektiv. Dann wollen wir zeigen, dass $\psi^* : C^* \to B^*, f \mapsto f \circ \psi$ injektiv ist. Zudem sei $\psi^*(f) = \psi^*(f')$ also $f \circ \psi = f' \circ \psi$. Für ein beliebiges $c \in C$ gibt es ein $b \in B$, so dass gilt $\psi(b) = c$, da ψ surjektiv. Also gilt

$$f(c) = f(\psi(b)) = (f \circ \psi)(b) = (f' \circ \psi)(b) = f'(\psi(b)) = f'(c)$$

für alle $c \in$ C also und somit ist $f = f'$ und damit ψ^* injektiv.

d) Wir wollen nun zeigen, dass aus der Exaktheit von

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow C^* \xrightarrow{\psi^*} B^* \xrightarrow{\varphi^*} A^* \longrightarrow 0$$

folgt. Die Exaktheit an der Stelle C^* folgt aus Teilaufgabe c) und die Exaktheit an der Stelle A^* aus Teilaufgabe b). Wir müssen also nur mehr die Exaktheit an der Stelle B^* zeigen, das heißt $\ker(\varphi^*) = \mathrm{im}(\psi^*)$.
Sei $a \in A$, dann gilt $\psi(\varphi(a)) = 0$, da $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(\psi)$. Für $f \in C^*$ folgt also

$$\varphi^* \circ \psi^*(f) = f \circ \psi \circ \varphi = 0.$$

Somit haben wir $\mathrm{im}(\psi^*) \subseteq \ker(\varphi^*)$ gezeigt.
Wir wollen nun $\ker(\varphi^*) \subseteq \mathrm{im}(\psi^*)$ zeigen. Sei dazu $g \in \ker(\varphi^*) \subset B^*$, das heißt, $g : B \to k$ mit $g \circ \varphi = 0$. Daraus folgt sofort $g(\mathrm{im}(\varphi)) = 0$ und mit der Exaktheit der ursprünglichen exakten Sequenz an der Stelle B folgt $g(\ker(\psi)) = 0$ und somit $\ker(\psi) \subset \ker(g)$. Wir wollen nun zeigen, dass $g \in \mathrm{im}(\psi^*)$ liegt, das heißt, dass ein $h \in C^*$ existiert mit $h \circ \psi = g$. Wir konstruieren nun ein solches h.
Wir betrachten $\psi : B \to C$ wieder als Komposition der natürlichen Abbildung $\psi' : B \to \mathrm{im}(\psi)$ und der Inklusion $\psi'' : \mathrm{im}(\psi) \to C$. Mit dem Homomorphiesatz gibt es nun ein $g' : \mathrm{im}(\psi) \to k$ mit $g = g' \circ \psi'$.
Wie in Teilaufgabe b) lässt sich g' zu einer Linearform $h : C \to k$ ausdehnen mit $g' = h \circ \psi''$. Damit folgt insgesamt

$$\psi^*(h) = h \circ \psi = h \circ \psi'' \circ \psi' = g' \circ \psi' = g,$$

was zu zeigen war für $\ker(\varphi^*) \subseteq \mathrm{im}(\psi^*)$.
Wir haben also gezeigt, dass die duale Sequenz einer kurzen exakten Sequenz wieder exakt ist und somit Teilaufgabe d).