Prof. Dr. Werner Bley

Martin Hofer, Thomas Jahn

Sommersemester 2015

3. Juli 2015

Lineare Algebra II – Übungsblatt 12

Spektralsatz und exakte Sequenzen
(letztes Übungsblatt der Lineare Algebra 2)

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit innerem Produkt und $W_1, \ldots, W_k \subseteq V$ Unterräume. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Es gilt
$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$
ist eine orthogonale direkte Summe.

b) Ist B_j eine Orthonormalbasis von W_j, $j = 1, \ldots, k$, so ist die Vereinigung $\bigcup_j B_j$ eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 2 (6 Punkte).
Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2z \\ 0 \\ -2x + 4z \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
Wie in der Vorlesung erwähnt, kann man den Spektralsatz (Theorem 22.4) auch auf eine alternative Art und Weise beweisen. Ziel dieser Aufgabe ist es, einen anderen Beweis für eine abgeschwächte Form (für symmetrische Matrizen) des Spektralsatzes zu finden. Insbesondere, soll Theorem 22.4 auch nicht zur Lösung der Aufgabe verwendet werden.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ihre Eigenwerte.

Zeigen Sie:

a) Es gibt Matrizen P_i und eine orthogonale Matrix U, so dass $A = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \mathcal{E}_i$, wobei $\mathcal{E}_i := U P_i U^t$.

b) $\mathcal{E}_i$ ist eine Projektion auf $V(\alpha_i)$, wobei $V(\alpha_i)$ der Eigenraum zum Eigenwert α_i ist.

c) Es gilt
$$E_n = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{E}_i \, .$$

d) Es gilt
$$\ker(\mathcal{E}_i) = V(\alpha_i)^{\perp}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Sei R ein Ring, A, B und C R-Moduln, $\varphi : A \to B$ $\psi : B \to C$ R-(Modul)homomorphismen.

- Man nennt eine Sequenz von Homomorphismen

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

exakt bei B, falls gilt $\ker(\psi) = \operatorname{im}(\varphi)$.

- Seien die M_i R-Moduln und $f_i : M_i \to M_{i+1}$ R-Homomorphismen. Eine Sequenz von Homomorphismen

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1}$$

nennt man *exakt*, falls sie exakt bei $M_1, \dots, M_n$ ist.

- Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

nennt man *kurze exakte Sequenz*, wobei 0 der triviale Modul ist und die Pfeile von 0 nach A und von C nach 0 die Nullhomomorphismen sind.

a) Zeigen Sie, dass

$$B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

genau dann exakt ist, wenn ψ surjektiv ist, und dass

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B$$

genau dann exakt ist, wenn φ injektiv ist.

Sei nun k ein Körper und $R = k$. Dann können wir A, B und C als k-Vektorräume auffassen und es gilt zum Beispiel $A^* = \operatorname{Hom}(A, k)$.

b) Zeigen Sie: Wenn $A \xrightarrow{\varphi} B$ injektiv ist, dann ist $B^* \xrightarrow{\varphi^*} A^*$ surjektiv.

c) Zeigen Sie: Wenn $B \xrightarrow{\psi} C$ surjektiv ist , dann ist $C^* \xrightarrow{\psi^*} B^*$ injektiv.

d) Sei

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Folgern Sie nun, dass

$$0 \longrightarrow C^* \xrightarrow{\psi^*} B^* \xrightarrow{\varphi^*} A^* \longrightarrow 0$$

ebenfalls eine kurze exakte Sequenz ist.

Nur eine vollständig ausgearbeitete Lösung kann mit der maximalen Anzahl an Punkten bewertet werden. Ihre Lösungen sind spätestens am **Dienstag, 14. Juli 2015** um **22 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe die Namen und die Gruppenkürzel in leserlicher Form. Nur *gehefte* Abgaben werden bei der Korrektur berücksichtigt. *Achtung, dieses Semester sind nur mehr Einzelabgaben zulässig!*