LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Werner Bley

Martin Hofer, Thomas Jahn

Sommersemester 2015

10. Juli 2015

Lineare Algebra 2 – Lösungsskizzen zu Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (8 Punkte).

a) Die Invertierbarkeit brauchen wir nicht extra zu zeigen, weil wir in Teilaufgabe b) die Orthogonalität der Matrix ohne die Teilaufgabe a) zeigen und Orthogonalität natürlich Invertierbarkeit impliziert. Das diese Abbildung ein Homomorphismus ist, kann man leicht nachrrechnen. Für jeden Homomorphismus gilt id $\in \ker(\sigma)$. Es gilt aber auch $\ker(\sigma) \subset \{\mathrm{id}\}$, denn ist $\pi \in \ker(\sigma)$, dann gilt $\sigma(\pi) = E_n$ und das kann nur die Identität in der symmetrischen Gruppe erfüllen, denn alle anderen Elemente würden mindestens eine Spalte vertauschen und die Voraussetzung somit nicht erfüllt werden.

b) Wir wollen nun zeigen, dass jede Permutationsmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal ist, das heißt, $A^tA = E_n$.
Dazu betrachten wir einen Eintrag $(AA^t)_{ij}$ der Matrix AA^t:

$$(AA^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}.$$

Sei $i \neq j$. Für jedes $1 \leq k \leq n$, gehören die Elemente a_{ik} und a_{jk} zur Spalte k. Eine Permutationsmatrix enthält in jeder Spalte genau einen Eintrag 1 und ansonsten Nullen. Also muss zumindest eines der Elemente a_{ik} oder a_{jk} Null sein. Das heißt, das in dem Fall gilt:

$$(AA^t)_{ij} = 0.$$

Sei nun $i = j$. Eine Permutationsmatrix hat aber auch in jeder Zeile nur genau einen Eintrag 1 und ansonsten Nullen. Deswegen gilt

$$(AA^t)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1.$$

Also haben wir berechnet

$$(AA^t)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j; \\ 1, & \text{falls } i = 1 \end{cases}$$

also ist $AA^t = E_n$. Da A eine quadratische Matrix ist, folgt $A^tA = E_n$, was zu zeigen war.

c) Sei also $A = (\alpha_{ij})$ orthogonal und alle Koeffizienten der Matrix positiv. Da A eine reelle Matrix ist und somit die Begriffe unitäre Matrix und orthogonal Matrix in diesem Fall übereinstimmen, sagt uns Beispiel 20.8, dass wie im Hinweis angemerkt gilt

$(Av, Av) = (v, v)$ für alle $v \in V$.
Da nun A per Voraussetzung orthogonal ist gilt mit Lemma 18.4

$$(Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Sei nun $i \neq j$. Dann gilt also

$$0 = (e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\alpha_{kj}.$$

Da alle Koeffizienten positiv sind muss immer $\alpha_{ki} = 0$ oder $\alpha_{kj} = 0$ gelten. Aus der Orthogonalität von A folgt außerdem, dass A invertierbar ist, also darf A keine Nullspalte haben (sonst wäre zum Beispiel $\det(A) = 0$) und somit muss es immer mindestens ein α_{ki} und ein α_{kj} ungleich Null geben.
Nehmen nun an, dass es mindestens zwei Einträge in einer Spalte ungleich Null gibt, also etwa $\alpha_{k_1 j}$ und $\alpha_{k_2 j}$ ungleich Null. Dann gibt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Zeile k_1 zwei Einträge ungleich Null, wobei der zweite Eintrag ungleich Null in Spalte ℓ mit $1 \leq \ell \leq n$ steht. Dann gilt aber mit dem vorher gezeigtem $0 = (e_j, e_\ell) = (Ae_j, Ae_\ell) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\alpha_{k\ell}$, was im Widerspruch zu $\alpha_{k_1 j}\alpha_{k_1 \ell} \neq 0$ steht, da alle Koeffizienten positiv sind. Also gibt es genau einen Eintrag in jeder Spalte ungleich Null.
Sei nun $i = j$, dann folgt mit der selben Argumentation wie oben, dass

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}^2.$$

Da wir nur positive Koeffizienten haben, sehen wir also, dass jede Spalte einen Eintrag mit 1 hat und ansonsten Nullen. Die Einser müssen aber in verschiedenen Zeilen stehen, denn sonst wäre $\det(A) = 0$ und somit A nicht invertierbar. Also haben wir gezeigt, dass A eine Permutationsmatrix ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte).
Wir können das charakteristische Polynom $\chi_A = (x-1)^3(x-3)$ berechnen und die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ direkt davon ablesen. Sei nun B_i der Eigenraum zum Eigenwert λ_i. Dann können wir eine Basis des Eigenraums berechnen und diese dann orthogonalisieren und erhalten , dass B_1 das Erzeugnis der orthogonalen Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist und B_2 das Erzeugnis des Vektors $(-1, 1, -1, 1)^t$. Nun normalisieren wir die Vektoren und erhalten die orthogonale Matrix

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & -1 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

welche die Eigenschaft hat $D = S^t AS$ mit $D = \mathrm{Diag}(1, 1, 1, 3)$, was zu zeigen war.

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Wir beweisen zuerst für die gegebene Abbildung die folgende Ungleichung. Sei $v, w \in V$, dann gilt

$$(v, v)(w, w) \geq (v, w)^2.$$

Falls v und w linear unabhängig sind, sieht man einfach das Gleichheit gilt. Seien also v und w linear unabhängig und gelte W ist das Erzeugnis von v und w. Dann ist die Einschränkung von $(,)$ definiert für $V \times V$ auf $W \times W$ ebenfalls symmetrisch und positiv semidefinit, weil sich das direkt von V überträgt. Aber die zugrundeliegende Matrix dieser Restriktion bezüglich der Basis $\{v, w\}$ von W hat Determinante gleich $(v, v)(w, w) - (v, w)^2$ also haben wir die obige Ungleichung gezeigt.
Nehmen wir jetzt an, dass $u \in U$ und $v \in V$ gilt. Dann ist $(u, u)(v, v) = 0(v, v) = 0$ was mit der obigen Ungleichung $(u, v) = 0 = (v, u)$ $(*)$ impliziert.

a) Seien $w, v \in U$, dann gilt wegen $(*)$, dass $(v, w) = 0$, was wiederum $(v + w, v + w) = 2(v, w) = 0$ impliziert, also ist $v + w \in U$. Es gilt natürlich $0 \in U$ und die Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation ist ebenfalls klar also ist U ein Unterraum von V.

b) Die Abbildung ist auf V/U wohldefiniert, denn sei $v_1 - w_1 \in U$ und $v_2 - w_2 \in U$, dann gilt mit $(*)$ $(v_1, v_2) - (w_1, w_2) = (v_1 - w_1, v_2) + (w_1, v_2 - w_2) = 0$.
Symmetrie und Bilinearität sind einfach nachzurechnen. Falls nun $0 = \langle v + U, v + U \rangle = (v, v)$, dann gilt $v + U = 0 + U$, also ist die Abbildung positiv definit und somit ein inneres Produkt auf $V/U \times V/U$.

Aufgabe 4 (6 Punkte).

a) Sei $v \in V$. Falls $(v, w) = 0$ für alle $w \in V$ gilt, folgt $v = 0$. Also ist die Bedingung $v \in \ker(\varphi^*)$ äquivalent zu $(w, \varphi^*(v)) = 0$ für alle $w \in V$. Weil nun $(w, \varphi^*(v)) = (\varphi(w), v)$ gilt, ist dies aber auch äquivalent zu $(\varphi(w), v) = 0$ für alle $w \in V$ und damit zu $v \in \operatorname{im}(\varphi)^\perp$.
Die zweite Aussage zeigt man einfach durch

$$\ker(\varphi) = \ker(\varphi^{**}) = \operatorname{im}(\varphi^*)^\perp.$$

b) Seien $v, w \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned}(\varphi(v), \varphi(w)) &= (v, \varphi^* \circ \varphi(w)), \\ (\varphi^*(v), \varphi^*(w)) &= (v, \varphi \circ \varphi^*(w)).\end{aligned}$$

Daher gilt

$$(\varphi(v), \varphi(w)) = (\varphi^*(v), \varphi^*(w))$$

für alle $v, w \in V$ genau dann, wenn

$$(v, \varphi^* \circ \varphi(w)) = (v, \varphi \circ \varphi^*(w))$$

für alle $v, w \in V$ gilt, und wegen den Eigenschaften des inneren Produkts, genau dann, wenn

$$\varphi^* \circ \varphi(w) = \varphi \circ \varphi^*(w)$$

für alle $w \in V$ gilt. Was aber gleichbedeutend mit $\varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^*$ ist.
Nun ist $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^*)$, denn es gilt

$$|\varphi(w)|^2 = (\varphi(w), \varphi(w)) = (\varphi^*(w), \varphi^*(w)) = |\varphi^*(v)|^2$$

für alle $w \in V$.

c) Wenn es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ gibt mit $\varphi^* = p(\varphi)$, so gilt

$$\varphi \circ \varphi^* = \varphi \circ p(\varphi) = p(\varphi) \circ \varphi = \varphi^* \circ \varphi.$$

Also ist φ dann normal.