Prof. Dr. Werner Bley
Martin Hofer, Thomas Jahn

Sommersemester 2015
13. Juni 2015

Lineare Algebra II – Übungsblatt 9

Orthogonalität und innere Produkte

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Es sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt als innerem Produkt. Für $v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$ sei $q(v_1, \ldots, v_{n-1}) \in V$ derjenige Vektor mit

$$(v, q(v_1, \ldots, v_{n-1})) = \det(v, v_1, \ldots, v_{n-1})$$

für alle $v \in V$.

a) Zeigen Sie, dass q eine wohldefinierte Abbildung $V^{n-1} \to V$ ist.
Man schreibt $v_1 \times \cdots \times v_{n-1} := q(v_1, \ldots, v_{n-1})$ und nennt diesen Ausdruck das *verallgemeinerte Vektorprodukt* von $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ orthogonal auf $v_1, \ldots, v_{n-1}$ steht.

c) Zeigen Sie: Sind $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ linear unabhängig, so ist $\{v_1 \times \cdots \times v_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ eine Basis von V.

Anmerkung: Für $n = 3$ ergibt sich das gewöhnliche Kreuzprodukt $V \times V \to V$, bekannt aus Schule, Physik usw.

Aufgabe 2 (8 Punkte).
Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Eine lineare Abbildung $p : V \to V$ heißt *Projektion* von V auf U, wenn $p(V) \subseteq U$ und $p|_U = \mathrm{id}_U$ ist.

a) Zeigen Sie: Die Projektionen von V auf U bilden im Vektorraum $\mathrm{End}_K(V)$ einen affinen Unterraum. Was ist seine Dimension, falls V endlichdimensional ist?

b) Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $p : V \to V$ ist genau dann eine Projektion von V auf einen Unterraum, wenn $p^2 = p$ ist.

Es sei nun speziell $K = \mathbb{K}$ (also $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), V habe ein inneres Produkt $(\ ,\ )$, und U sei endlichdimensional. Zeigen Sie:

c) Es gibt genau eine Projektion p von V auf U mit der Eigenschaft, dass $v - p(v) \in U^\perp$ ist für alle $v \in V$. Diese Projektion nennt man die *Orthogonalprojektion* auf U.

d) Eine Projektion p von V auf U ist genau dann die Orthogonalprojektion, wenn $\|p(v)\| \leq \|v\|$ für alle $v \in V$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte).
Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen $[-1, 1] \to \mathbb{R}$, versehen mit dem inneren Produkt

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Es sei $U \subset V$ der Unterraum aller *ungeraden* Funktionen, d.h. aller Funktionen $f \in V$ mit $f(-x) = -f(x)$. Bestimme das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U in V.

Aufgabe 4 (6 Punkte).
Sei $V = \mathbb{R}^2$. Wir definieren für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$(v, w)_A := v^t A w,$$

wobei $v, w \in V$.

a) Zeigen Sie, dass $(v, w)_A = (w, v)_A$ für alle $v, w \in V$ genau dann gilt, wenn $A = A^t$ (symmetrische Matrix).

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass $(v, v)_A > 0$ für alle $0 \neq v \in V$ genau dann gilt, wenn $\det(A) > 0$ und $a_{11} > 0$.

c) Zeigen Sie nun, dass $(v, w)_A$ ein Skalarprodukt ist, wenn für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt: $A = A^t$, $\det(A) > 0$ und $a_{11} > 0$.

Anmerkung: Die in dieser Aufgabe gezeigte Aussage kann man auch auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Das brauchen Sie für die volle Punktezahl bei dieser Aufgabe aber nicht zu tun. Sie können aber natürlich trotzdem gerne überlegen, wie man das beweisen könnte.

Nur eine vollständig ausgearbeitete Lösung kann mit der maximalen Anzahl an Punkten bewertet werden. Ihre Lösungen sind spätestens am **Dienstag, 23. Juni 2015** um **22 Uhr** in den Übungskasten der Vorlesung (im 1. Stock vor der Bibliothek) einzuwerfen. Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe die Namen und die Gruppenkürzel in leserlicher Form. Nur *gehefteten* Abgaben werden bei der Korrektur berücksichtigt. *Achtung, dieses Semester sind nur mehr Einzelabgaben zulässig!*