Aufgabe 1. **[15 Punkte]**

Wir betrachten in dieser Aufgabe den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen inneren Produkt $(\,,\,) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(v, w) = v^t w$. Setze

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

a) Geben Sie eine Orthogonalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ mit $V = \langle b_1, b_2 \rangle$ an.

b) Geben Sie eine Basis von $V^\perp$ an.

Begründen Sie jeweils auch die Richtigkeit Ihres Ergebnisses.

Aufgabe 2. **[15 Punkte]**

a) Zeigen Sie, dass die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}^3/L_1$ und $\mathbb{Z}^3/L_2$ isomorph sind. Dabei sind

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) Zeigen Sie, dass die $\mathbb{R}$-Moduln $\mathbb{R}^3/M_1$ und $\mathbb{R}^3/M_2$ *nicht* isomorph sind. Dabei sind

$$M_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad M_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Hinweis: In a) ist $\langle\ ,\ ,\ \rangle$ das Erzeugnis als $\mathbb{Z}$-Modul, in b) das Erzeugnis als $\mathbb{R}$-Modul.

Aufgabe 3. **[15 Punkte]**

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist K ein Körper, so ist $K \times K$ ein Integritätsbereich mit komponentenweiser Multiplikation.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein K-Unterraum. Zu jedem $\varphi \in U^*$ existiert ein $\widehat{\varphi} \in V^*$ mit der Eigenschaft, dass für alle $u \in U$ die Gleichung $\widehat{\varphi}(u) = \varphi(u)$ gilt. Dabei bezeichnen U^* bzw. V^* die Dualräume zu U bzw. V.

c) Beweisen oder widerlegen Sie: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix mit $A^* = -A$, wobei hier $A^* = (\overline{a}_{ji})$ die zu $A = (a_{ij})$ transponierte konjugierte Matrix bezeichnet. Dann hat jeder Eigenwert von A Realteil 0.

d) Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen in $M_3(\mathbb{C})$ diagonalisierbar sind. Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Entscheidung.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Entscheiden Sie, welche der folgenden simultanen Kongruenzen lösbar sind. Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Entscheidung.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{17} \\ x \equiv 2 \pmod{23} \end{cases} \qquad \begin{cases} y \equiv 1 \pmod{7} \\ y \equiv 2 \pmod{21} \end{cases}$$

Aufgabe 4. **[15 Punkte]**

Sei $p(X) = X^3 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$.

a) Bestimmen Sie die irreduziblen Faktoren von p im Ring $\mathbb{Q}[X]$.

b) Finden Sie zwei 5×5 Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$, die das Minimalpolynom p haben und zueinander *nicht* ähnlich sind.

c) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$, sodass für jede Matrix A aus b) die Gleichung $f(A) = A^{-1}$ erfüllt ist.
(*Hinweis: Diesen Aufgabenteil können Sie auch lösen, wenn Sie Teil b) nicht gelöst haben.*)

Beweisen Sie jeweils auch die Richtigkeit Ihres Ergebnisses!