Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Version vom:
3. 12. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Probeklausur

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit der Kontraposition für beliebige Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$:

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$$

Formulieren Sie die entsprechende Schlussregel, welche als Beweismethode eingesetzt werden kann.

Lösung: Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen. Die Wahrheitstafel für die Kontraposition lautet:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Da die Spalten für $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und für $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ identisch sind, sind $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ äquivalent. Somit ist

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$$

allgemeingültig. Wenn man also ausgehend von der Negation einer Aussage $\mathcal{B}$ beweisen kann, dass auch die Negation der Aussage $\mathcal{A}$ gilt, dann hat man auch gezeigt, dass die Aussage $\mathcal{A}$ die Aussage $\mathcal{B}$ impliziert; man hat dann die Folgerung der Aussage $\mathcal{B}$ aus der Aussage $\mathcal{A}$ durch einen Widerspruchsbeweis gewonnen.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die rationale Zahl q, welche die dyadischen Darstellung (d.h., die b-adischenDarstellung mit $b = 2$) $0,101010\ldots$ (wobei also in jeder ungeraden Nachkommastelle eine 1 steht, und in jeder geraden Nachkommastelle eine 0) besitzt.

Lösung: Um aus der gegebenen Darstellung $0.101010\ldots$ die rationale Zahl q zu bestimmen, verwenden wir

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

wobei für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_{2n} = 0$ und $a_{2n+1} = 1$. Unter Verwendung des Satzes 2.46 für die geometrische Reihe wird

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{2^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Folge $(a)_{n \in \mathbb{N}}$ auf ihre Konvergenzeigenschaften, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n := \frac{(-1)^n n^3}{n^3 + 1}.$$

Lösung: Zum einen folgt die Divergenz der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus der Tatsache, dass sie zwei verschiedene Häufungspunkte besitzt: Die durch

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}(2n+1)^3}{(2n+1)^3 + 1} = -\frac{(2n+1)^3}{(2n+1)^3 + 1}$$

bestimmte Teilfolge konvergiert gemäss den Ergebnissen aus Aufgabe 6.1 gegen -1, während die durch

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{2n}(2n)^3}{(2n)^3 + 1} = \frac{(2n)^3}{(2n)^3 + 1}$$

bestimmte Teilfolge gegen $+1$ konvergiert. Somit kann die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wegen Beispiel 5 in 2.72 nicht konvergieren.

Eine andere Möglichkeit, die Divergenz der Folge zu zeigen, besteht in der Annahme der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Herleitung eines Widerspruches. Dazu formen wir um

$$a_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^3+1} = \frac{(-1)^n(n^3+1)-(-1)^n}{n^3+1} = (-1)^n - \frac{(-1)}{n^3+1}.$$

Wegen der angenommenen Konvergenz und Satz 2.37 konvergiert dann für $n\to\infty$

$$a_n + \frac{(-1)}{n^3+1} \to \lim_{n\to\infty} a_n + 0,$$

da der zweite Term die Glieder einer Nullfolge enthält. Da aber andererseits

$$a_n + \frac{(-1)}{n^3+1} = (-1)^n$$

ist, müsste dann auch die Folge $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, was aber nicht der Fall ist. Somit ist die Annahme der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falsch.

Aufgabe 4. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Wenn die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)$. In welcher Relation stehen die Summen der drei Reihen zueinander?

Lösung: Nach Definition der Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} s_k$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \lim_{k\to\infty} r_k$, wobei $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(r_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die jeweiligen Partialsummen $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ und $r_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$ sind. Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der Partialsummen $c_k = \sum_{n=0}^{k}(a_n - b_n)$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$c_k = a_k - b_k$$

und wegen der Konvergenz von $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(r_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und Satz 2.37

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty}(a_k - b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k - \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Somit erhalten wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)$ und die Gleichheit $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Aufgabe 5. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ sind vollständig (d.h., jede Cauchy Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{Z}$ hat einen Grenzwert in $\mathbb{Z}$).

Lösung: Nach Definition einer Cauchy Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss es für jedes $\epsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ geben, so dass der Abstand $|a_n - a_m| < \epsilon$ ist sobald $n, m \geq N$ gilt. Wählt man nun beispielsweise $\epsilon = 1/2$, dann kann die Bedingung $|a_n - a_m| < 1/2$ für $a_n, a_m \in \mathbb{Z}$ nur erfüllt werden, wenn $a_n = a_m$ ist. Das bedeutet jedoch, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur eine Cauchy Folge sein kann, wenn ab einem Index n_a (welcher natürlich von der betreffenden Folge abhängt) die Folge konstant ist, d.h., $a_{n_a} = a_{n_a+1} = a_{n_a+2} = \dots$. Solche Folgen konvergieren offensichtlich, wobei $\lim_{n\to\infty} a_n = a_{n_a} \in \mathbb{Z}$ ist. Da somit alle Cauchy Folgen mit ganzzahligen Folgengliedern zu einer ganzen Zahl konvergieren, ist $\mathbb{Z}$ vollständig.

Aufgabe 6. Betrachten Sie die Mengen $A := \{a_1, a_2\}$, $B := \{b_1, b_2\}$, und $C := \{c_1, c_2, c_3\}$ mit jeweils unterschiedlichen Elementen.

(a) Wie viele unterschiedliche injektive Funktionen $g : B \to C$ gibt es?

(b) Wie viele verschiedene Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ existieren, sodass die Komposition $h := g \circ f : A \to C$ eine surjektive Abbildung von A nach C ist?

Lösung: (i) Entsprechenend der Definition der Mengen $A := \{a_1, a_2\}$, $B := \{b_1, b_2\}$ und $C := \{c_1, c_2, c_3\}$ enthält die Menge B zwei Elemente, so dass für jede Abbildung $g : B \to C$ die Bildmenge $g(B)$ nur höchstens zwei Elemente enthalten kann. Um zu einer injektiven Abbildung zu gelangen, muss $g(B)$ aus mindestens zwei Elementen bestehen, da andernfalls $g(b_1) = g(b_2)$ die Gleichheit $b_1 = b_2$ impliziert. Folglich ist die Zahl der verschiedenen injektiven Abbildungen g gleich der Zahl der Möglichkeiten, zwei verschiedene Elemente aus den drei Elementen der Menge C auszuwählen, nämlich 3 Möglichkeiten für das erste Element, und dann 2 Möglichkeiten für das zweite Element, also zusammen 6 Möglichkeiten. Damit gibt es auch 6 verschiedene injektive Abbildungen von B nach C.
(ii) Da, wie bereits in (i) erwähnt, für jede Abbildung $g : B \to C$ das Bild $g(B) \subsetneq C$ nur maximal 2 Elemente enthalten kann und damit immer eine

echte Teilmenge von C ist, gibt es keine surjektive Abbildung von B nach C. Damit kann es auch keine surjektive hintereinander ausgeführte Abbildung $h = g \circ f$ von A nach C geben.