Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Version vom:
14. 03. 2017

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Nachholklausur

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2 \cdot \sqrt{\cos\left(\frac{\ln x}{x}\right) + 2}$.

Lösung: Unter gegebenenfalls mehrfacher Verwendung der Ketten-, Produkt- und/oder Quotientenregel ergibt sich

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\sqrt{\cos(x^{-1}\log x) + 2} + x^2\big(\sqrt{\cos(x^{-1}\log x) + 2}\big)' \\
&= 2x\sqrt{\cos(x^{-1}\log x) + 2} + x^2 \frac{\big(\cos(x^{-1}\log x) + 2\big)'}{2\sqrt{\cos(x^{-1}\log x) + 2}} \\
&= 2x\sqrt{\cos(x^{-1}\log x) + 2} + x^2 \frac{-\sin(x^{-1}\log x)\big(x^{-1}\log x\big)'}{2\sqrt{\cos(x^{-1}\log x) + 2}} \\
&= 2x\sqrt{\cos(x^{-1}\log x) + 2} + x^2 \frac{-\sin(x^{-1}\log x)\big(-x^{-2}\log x + x^{-1}x^{-1}\big)}{2\sqrt{\cos(x^{-1}\log x) + 2}} \\
&= 2x\sqrt{\cos(x^{-1}\log x) + 2} + \frac{\sin(x^{-1}\log x)(\log x - 1)}{2\sqrt{\cos(x^{-1}\log x) + 2}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2. Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche $\left|\operatorname{Im} e^{\mathrm{i}(x+2\pi/3)}\right| = 1$ gilt.

Lösung: Mithilfe der Eulerschen Formel ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\left|\operatorname{Im} e^{\mathrm{i}(x+2\pi/3)}\right| &= \left|\operatorname{Im}\big(\cos(x + 2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(x + 2\pi/3)\big)\right| \\
&= \left|\sin(x + 2\pi/3)\right|,
\end{aligned}
$$

so dass die Bedingung in der Aufgabenstellung äquivalent ist zu

$$\left|\sin(x + 2\pi/3)\right| = 1,$$

also zu $\sin(x + 2\pi/3) = \pm 1$. Da $\sin y = \pm 1$ genau durch $y = (2n + 1)\pi/2$ mit $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt wird, erhalten wir

$$x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \big(n - \frac{1}{6}\big)\pi, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

als die reellen Lösungen von $\left|\operatorname{Im} e^{\mathrm{i}(x+2\pi/3)}\right| = 1$.

Aufgabe 3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ Folge mit $a_n := \left(\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{4}\right)^n$.

1. Berechnen Sie a_3.
2. Bestimmen Sie a_{10}.
3. Finden Sie heraus, ob $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert.

Lösung: Zur Berechnung von a_3 kann man – abgesehen vom Ausrechnen durch Multiplikation oder Anwendung des Binomialsatzes – die Polardarstellung von a_1 verwenden. Diese lautet

$$a_1 = |a_1| e^{\mathrm{i}\phi} = \frac{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}}{4}\, e^{\mathrm{i}\phi} = \frac{2}{4}\, e^{\mathrm{i}\phi} = \frac{1}{2} e^{2\pi\mathrm{i}/3},$$

wobei wir benutzt haben dass

$$\frac{a_1}{|a_1|} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3) = e^{2\pi\mathrm{i}/3}$$

gilt. (Die obigen Werte der trigonometrischen Funktionen kann man wie in Aufgabe 12.3 (b) durch Anwendung von trigonometrischen Identitäten aus dem gegebenen $\sin(\pi/6) = 1/2$ herleiten.) Folglich erhalten wir

$$a_3 = (a_1)^3 = \big(\frac{1}{2} e^{2\pi\mathrm{i}/3}\big)^3 = \frac{1}{2^3} e^{2\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

und daraus auch

$$a_{10} = (a_1)^{10} = \big((a_1)^3\big)^3 a_1 = \frac{1}{2^9} a_1 = \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{2^{11}} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{2048}.$$

Um die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu untersuchen, benutzen wir, dass für Nullfolgen die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent zur Konvergenz von $(\,|a_n|\,)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dann folgt aus

$$|a_n| = |a_1|^n = \frac{1}{2^n},$$

der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Aufgabe 4.

1. Beweisen Sie, dass $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$ eine bijektive Abbildung ist.

2. Finden Sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

Lösung: Als rationale Kombination von den stetigen und sogar differenzierbaren Funktionen $x \mapsto x$ und $x \mapsto 1-x^2$ mit $1-x^2 \neq 0$ für $x \in (-1,1)$ ist f stetig. Da $f(x) \to \infty$ für $x \uparrow 1$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \downarrow -1$ gilt, folgt die Surjektivität von f aus dem Zwischenwertsatz. Da f auch differenzierbar ist und für die Ableitung gilt

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \quad \text{wenn} \quad -1 < x < 1,$$

ist f streng monoton (steigend) und somit injektiv. Aus der Surjektivität und der Injektivität folgt dann die Bijektivität von f (vergleiche auch Bild 1). Zur Bestimmung der Umkehrfunktion f^{-1} lösen wir die sich aus $y = x/(1-x^2)$ ergebende quadratische Gleichung $yx^2 + x - y = 0$ nach x auf,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y},$$

wobei $y \neq 0$ voraussetzt wird. Die Bedingung

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y} > -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2y \pm \sqrt{1+4y^2} > 1$$

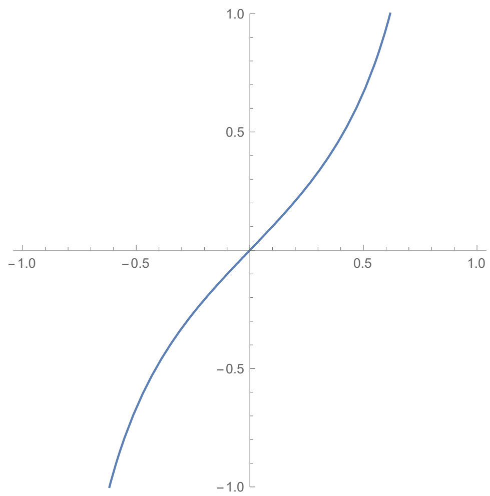

Bild 1. Die Funktion $f(x) = x/(1-x^2)$.

schliesst das negative Vorzeichen der Wurzel aus. Da des weiteren $y = 0$ in den obigen Gleichungen $x = 0$ entspricht, ist die Umkehrfunktion von f durch

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

gegeben. (vergleiche Bild 2).

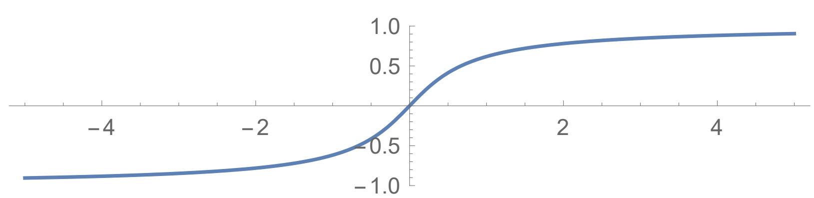

Bild 2. Die Funktion $y \mapsto f^{-1}(y)$.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x|^3$. Wievielmal ist $f(x)$ differenzierbar?

Lösung: Die Funktion

$$f(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

ist als ein Monom auf den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ beliebig oft differenzierbar. Durch abschnittsweises Differenzieren erhalten wir

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}$$

und

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & x > 0 \\ -6x, & x < 0, \end{cases}$$

während

$$f'''(x) = \begin{cases} 6, & x > 0 \\ -6, & x < 0 \end{cases}.$$

gilt. Um die Differenzierbarkeit im Punkte $x = 0$ zu untersuchen, bilden wir

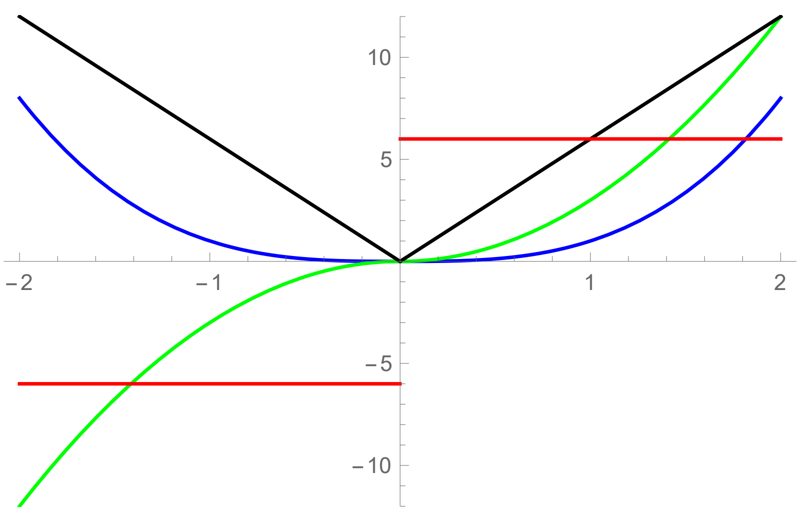

Bild 3. Die Funktionen f (blaue Kurve), f' (grüne Kurve), f'' (schwarze Kurve), f''' (rote Kurve) auf dem Interval $[-2, 2]$.

die entsprechenden Differenzenquotienten und erhalten

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^3}{h} = 0$$

und

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3\,\mathrm{sgn}(h)\,|h|^2}{h} = 0.$$

Somit existieren die erste und zweite Ableitung von f bei $x = 0$. Da der rechts- und linksseitige Limes des Differenzenquotienten

$$f'''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(h) - f''(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6|h|}{h}.$$

verschieden ist, existiert die dritte Ableitung von f im Punkt $x = 0$ nicht (siehe auch Beispiel 5.3.4 im Skript). Somit ist f genau zweimal differenzierbar. Zur Veranschaulichung ist die Funktion f sowie ihre Ableitungen in Bild 3 dargestellt.

Aufgabe 6. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^{-x}$. Berechnen Sie

1. $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;
3. die Ableitung f'.

Lösung: Unter Verwendung der Definition der allgemeinen Potenz und der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} x^{-x} = \lim_{x\downarrow 0} \exp\bigl(-x\ln x\bigr) = \exp\bigl(-\lim_{x\downarrow 0}(x\ln x)\bigr)$$

und mithilfe der l'Hospital Regel

$$\lim_{x\downarrow 0}(x\ln x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\downarrow 0} x = 0,$$

so das $\lim_{x\downarrow 0} x^{-x} = \exp(0) = 1$ folgt.
Wenn $x \to \infty$ strebt, erhalten wir andererseits

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^{-x} = \lim_{x\to\infty} \exp\bigl(-x\ln x\bigr) = 0,$$

da $-x \ln x \to -\infty$ für $x \to \infty$ gilt.
Die Ableitung von f errechnet sich zu

$$\begin{aligned} \left(x^{-x}\right)' &= \left(\exp(-x \ln x)\right)' = \exp(-x \ln x)\left(-\ln(x) - x x^{-1}\right) \\ &= -\exp(-x \ln x)\left(\ln(x) + 1\right) = -x^{-x}\left(\ln(x) + 1\right). \end{aligned}$$