Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Version vom:
11. 02. 2017

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Klausur

Aufgabe 1.

1. Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Menge $M := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} : \operatorname{Re}(\ln z) \in (0,1) \text{ und } |\operatorname{Im} z| > |\operatorname{Re} z|\}$.
2. Finden Sie $\sup\{|z| : z \in M\}$ und $\inf\{|\operatorname{Im} z| : z \in M\}$.

Lösung: Da $\operatorname{Re}(\ln z) = \ln(|z|)$ die Werte 0 und 1 für $|z| = 1$ beziehungsweise $|z| = e$ annimmt, erhält man für den Bereich $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re}(\ln z) \in (0,1)\}$ die Darstellung im linken Teil von Bild 1; im rechten Teil von Bild 1 wird die

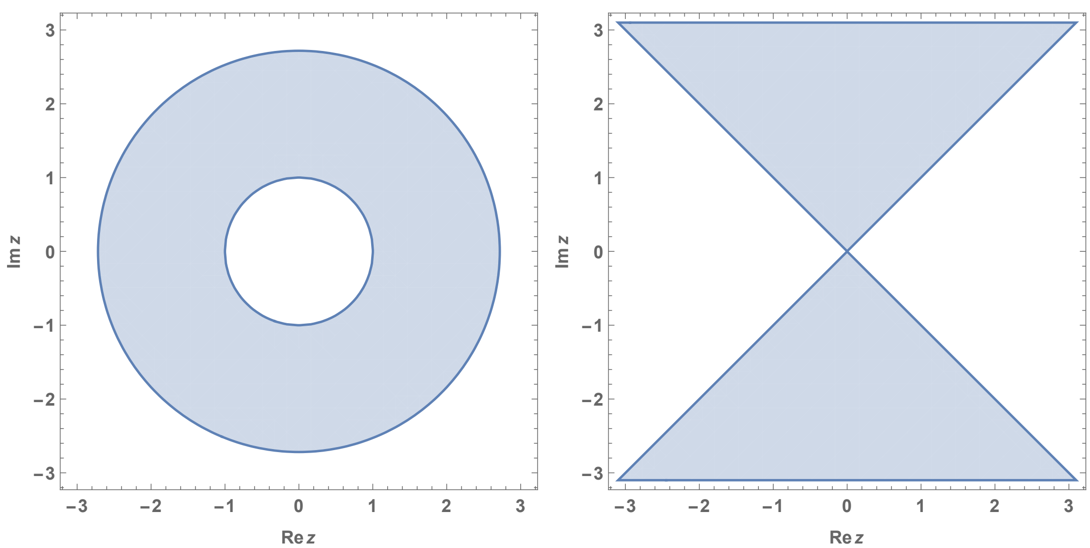

Bild 1. Die Mengen $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re}(\ln z) \in (0,1)\}$ (links) und $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \,|\, |\operatorname{Im} z| > |\operatorname{Re} z|\}$ (rechts).

Menge $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \,|\, |\mathrm{Im}\, z| > |\mathrm{Re}\, z|\}$ gezeigt. Zusammen (als Schnittmenge) ergibt sich dann die Darstellung von M wie in Bild 2 gezeichnet, wobei (wie in Bild 1) die Ränder der markierten Gebiete nicht zu den jeweils dargestellten Mengen gehören.

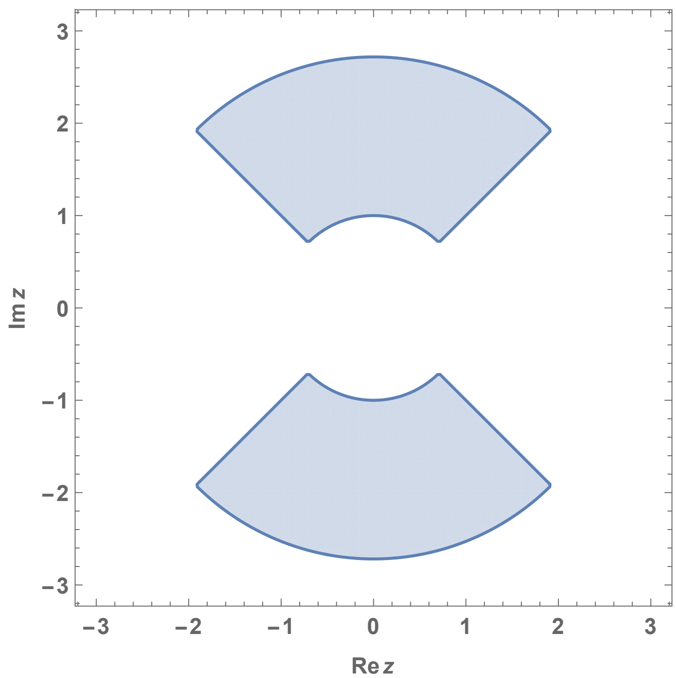

Bild 2. Die Menge $M = \{z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} : \mathrm{Re}(\ln z) \in (0,1)$ und $|\mathrm{Im}\, z| > |\mathrm{Re}\, z|\}$.

Da $e \geq |z|$ für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(\ln z) \in (0,1)\}$ gilt und damit e auch eine obere Schranke an $|z|$ aus der Schnittmenge $M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(\ln z) \in (0,1)\} \cap \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \,|\, |\mathrm{Im}\, z| > |\mathrm{Re}\, z|\}$ ist, während andererseits für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \mathrm{i}(e - 1/n)$ gilt, dass $a_n \in M$ liegt und $\lim_{n\to\infty} |a_n| = e$ ist, folgt $\sup\{|z| \,|\, z \in M\} = e$.
Um andererseits das Infimum von $\{|\mathrm{Im}\, z| \,|\, z \in M\}$ zu bestimmen, benutzen wir, dass $1 < |z|$ für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(\ln z) \in (0,1)\}$ und $|\mathrm{Im}\, z| = |\mathrm{Im}\,(z \exp(\mathrm{i}\phi))| = |z||\sin\phi| > |\sin\phi| > \sin(\pi/4)$ wegen der Bedingung $|\mathrm{Im}\, z| > |\mathrm{Re}\, z|$ gilt (wobei die letzte Bedingung äquivalent zu $|\sin\phi| > |\cos\phi|$ ist). Folglich ist $\sin(\pi/4)$ eine untere Schranke für die Menge $\{|\mathrm{Im}\, z| \,|\, z \in M\}$ und auch das Infimum dieser Menge, da für beispielsweise die durch $a_n := (1 + 1/n)\exp(\mathrm{i}\big((\pi + 1/n)/4\big)$ definierte Folge gilt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ und

$\lim_{n\to\infty} a_n = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$. Hierbei errechnet sich der angegebene Wert des Sinus durch Quadrieren von $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ und Benutzung von $\cos^2(\pi/4) + \sin^2(\pi/4) = 1$.

Aufgabe 2. (*12 Punkte*)
Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}, & x > 0; \\ 1, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

gegeben. Wievielmal ist f differenzierbar?

Lösung: Für $x > 0$ und $x \leq 0$ sind die entsprechenden abschnittsweise definierten Teile von f als rationale Kombination von differenzierbaren Funk-

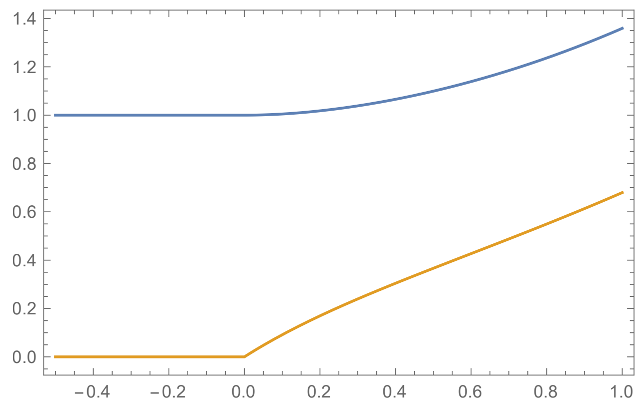

Bild 3. Die Funktion f (blaue Kurve) und die erste Ableitung f' (braune Kurve).

tionen differenzierbar. Für $x \leq 0$ ergibt sich für die Ableitungen $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei die Ableitungen im Punkte $x_0 = 0$ als linksseitige Ableitungen zu verstehen sind. Im Falle $x > 0$ erhalten wir durch Anwendung der Produkt- und Kettenregeln

$$f'(x) = e^x\big((1+x)^{-1} - (1+x)^{-2}\big)$$

und

$$f''(x) = e^x\big((1+x)^{-1} - 2(1+x)^{-2} + 2(1+x)^{-3}\big).$$

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow 0} f''(x) = 1$$

so dass $\lim_{x\downarrow 0} f''(x) \neq \lim_{x\uparrow 0} f''(x)$ ist. Der (rechtsseitige) Limes des Differenzenquotienten bei Null

$$\begin{aligned}\lim_{h\downarrow 0} \frac{f'(h)}{h} &= \lim_{h\downarrow 0} e^h \frac{(1+h)^{-1} - 2(1+h)^{-2} + 2(1+h)^{-3}}{h} \\ &= \lim_{h\downarrow 0} e^h \frac{1+h^2}{h}\end{aligned}$$

existiert nicht, und damit ist f' nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$ ist. Da andererseits $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \lim_{x\uparrow 0} f'(x)$ gilt, ist f genau einmal differenzierbar. Die Funktion f und die erste Ableitung von f sind in Bild 3 dargestellt, wobei sich die Nichtdifferenzierbarkeit von f' durch einen Knick bei $x_0 = 0$ bemerkbar macht.

Aufgabe 3. Finden Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (2x-1)\mathrm{e}^{-x^2}$. Berechnen Sie $\sup\{f(x) : \ x \in [0,\infty)\}$ und $\inf\{f(x) : \ x \in [0,\infty)\}$.

Lösung: Die Funktion f ist differenzierbar (da sie durch eine differenzierbare Kombination von differenzierbaren Funktionen gegeben ist), und die Ableitung errechnet sich mithilfe der Produkt- und Kettenregeln zu

$$f'(x) = -2(2x^2 - x - 1)\exp(-x^2).$$

Da die Gleichung $2x_\mathrm{e}^2 - x_\mathrm{e} - 1 = 0$ nur die eine positive Lösung $x_\mathrm{e} = 1$ besitzt, während für reelle x immer $\exp(-x^2) > 0$ gilt, hat f' ausser bei $x_e = 1$ keine weiteren Nullstellen. Da $f'(0) = 2$ und $f'(x) < 0$ für hinreichend grosses x ist, muss gelten $f'(x) > 0$ für $x < 1$ und $f'(x) < 0$ für $x > 1$ (f' kann ja nur bei $x_e = 1$ das Vorzeichen wechseln). Folglich ist f streng monoton steigend für $x < 1$ und streng monoton fallend für $x > 1$. Infolgedessen muss es sich bei $x_e = 1$ um ein Maximum von f handeln, wobei $f(1) = 1/e$ ist. Wir können zudem folgern, dass am linken Randpunkt, also bei $x = 0$, ein lokales Minimum vorliegt (da aufgrund des streng monotonen Anstiegs $f(x) > f(0)$ gilt für $0 < x < 1$), mit $f(0) = -1$. Wegen $0 < f(x) < 1/e$ für

$x > x_e = 1$, ist dieses Minimum ein globales Minimum; des weiteren erhalten wir als Bildmenge von f

$$f([0,\infty)) = f\big([0,x_e]\big) \cup f\big([x_e,\infty)\big) = f\big([0,x_e]\big) = [-1,\, 1/e]$$

und damit $\sup\big\{f(x)\,|\,x \in [0,\infty)\big\} = 1/e$ und $\inf\big\{f(x)\,|\,x \in [0,\infty)\big\} = -1$, welche identisch mit dem berechneten Maxiumum beziehungsweise Minimum von f sind. (Siehe auch Bild 4.)

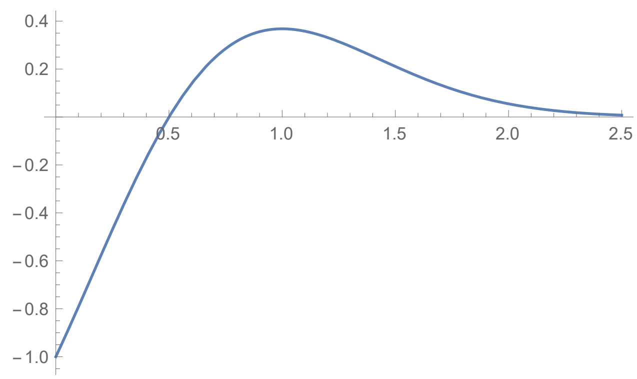

Bild 4. Die Funktion $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x^2}$ für $0 \le x \le 2.5$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ die folgende Relation zwischen den Binomialkoeffizienten gilt:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Lösung: Für $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt mit der Wahl des Hauptnenners $(n+1-k)!\,k!$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{k\,(n!) + (n-k+1)(n!)}{(n+1-k)!\,k!} \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{(n+1-k)!\,k!} \\ &= \binom{n+1}{k},\end{aligned}$$

während wir für $k = 0$ erhalten

$$\binom{n}{-1} + \binom{n}{0} = 0 + 1 = 1 = \binom{n+1}{0}.$$

Aufgabe 5. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. Für welche a konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n)^n$?

2. Finden Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Lösung: Die Konvergenz $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ impliziert $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Benutzen wir nun das Wurzelkriterium zur Untersuchung der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^n$, so erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(a_n)^n|} = \limsup_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|,$$

woraus ersichtlich ist, dass diese Reihe für $|a| < 1$ konvergiert und für $|a| > 1$ divergiert. Für $|a| = 1$ sind sowohl Divergenz (Beispiel: $a_n := 1/\sqrt[n]{n}$) als auch Divergenz (Beispiel: $a_n := 1/\sqrt[n]{n^2}$) der Reihe möglich (und mithilfe des Wurzelkriteriums nicht zu entscheiden).

Um den Konvergenzradius r von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ zu bestimmen, verwenden wir

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Hierbei haben wir die Stetigkeit der exp und log Funktion benutzt, um den Limes

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \exp\bigl(n^{-1} \ln(|a_n|)\bigr) = \exp\bigl(\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln(|a_n|)\bigr) \\
&= \exp\bigl((\lim_{n\to\infty} n^{-1}) \ln(\lim_{n\to\infty} |a_n|)\bigr) = \exp\bigl(0 \cdot \ln |a|\bigr) = 1
\end{aligned}$$

zu berechnen, und dass damit gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Aufgabe 6. Beweisen Sie, dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \cos x + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\pi^2} - 1\right)$ mindestens zwei Nullstellen hat.

Lösung: Als Summe von stetigen Funktionen ist f wieder eine stetige Funktion. Sie erfüllt $f(0) = 1 - 1/2 = 1/2$ und $f(\pi) = \cos \pi = -1$, während $f(2\pi) = \cos(2\pi) + 3/2 = 5/2$ ist. Damit können wir auf die Intervalle $[0, \pi]$ und $[\pi, 2\pi]$ den Nullstellensatz von Bolzano anwenden, aus welchem wir die Existenz von mindestens jeweils einer Nullstelle in diesen beiden Intervallen folgern können (für eine graphische Darstellung, vgl. Bild 5).

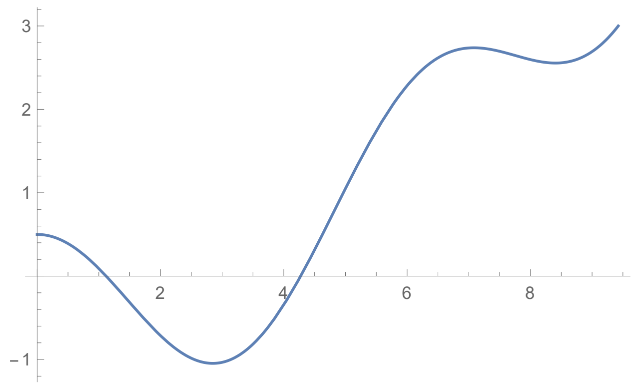

Bild 5. Die Funktion $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\pi^2} - 1\right)$ im Bereich $0 \leq x \leq 3\pi$.