Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
20. 12. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 9

9.1 Als erstes betrachten wir die Teilmenge

$$M_1 := \left\{ \frac{1^2 + k^2}{2k} \,|\, k \in \mathbb{N} \wedge k \geq 2 \right\} \subset M,$$

wobei wir $n := 1$ in M gesetzt haben. Für $k \to \infty$ verhalten sich die Elemente von M_1 wie

$$\frac{1^2 + k^2}{2k} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2k} \to \infty.$$

Somit ist M_1 und damit auch M nicht nach oben beschränkt, so dass wir $\sup M = \infty$ erhalten.
Andererseits benutzen wir die Ungleichung

$$\frac{n^2 + k^2}{2nk} \geq 1$$

(welche aus $(n-k)^2 \geq 0$ folgt), um zu erkennen, dass 1 eine untere Schranke von M ist.
Nun nehmen wir an, dass es eine untere Schranke $x = 1 + \delta > 1$ von M gibt (d.h. also $\delta > 0$) und betrachten die Elemente in M, welche sich für $n = k - 1$ ergeben; dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{(k-1)^2 + k^2}{2k(k-1)} &= 1 + \frac{-2k(k-1) + (k-1)^2 + k^2}{2k(k-1)} \\
&= 1 + \frac{(k-1)(-2k + k - 1) + k^2}{2k(k-1)} \\
&= 1 + \frac{1}{2k(k-1)} < 1 + \delta = x
\end{aligned}$$

für hinreichend grosse k (welche $k > N$ mit $N(N-1) > 2/\delta$ erfüllen). Dieses bedeutet aber, dass x keine untere Schranke sein kann. Folglich gibt es keine untere Schranken von M, welche grösser als 1 sind, so dass wir $\inf M = 1$ erhalten. Darüber hinaus folgern wir für $x = 1 + \epsilon$ aus obiger Abschätzung, dass 1 ein Häufungspunkt der Menge M ist, da für jedes $\epsilon > 0$ und $k \geq N$

$$\frac{(k-1)^2 + k^2}{2k(k-1)} \in (1-\epsilon,\, 1+\epsilon)$$

und damit unendlich viele Elemente von M in jeder Umgebung $\mathcal{U}_\epsilon$ von 1 liegen.

Alternativ lässt sich das Fehlen einer unteren Schranke, welche grösser als 1 ist, und die Existenz des Häufungspunktes bei 1 dadurch erkennen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{n^2 + (n+1)^2}{2n(n+1)} \in M$$

für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert (und, im Falle des Häufungspunktes, wegen der strikten Monotonie $a_{n+1} < a_n$ auch unendlich viele a_n in jeder ϵ-Umgebung der 1 liegen).

9.2 Für $j = 1, 2$, sei $z_j := x_j + \mathrm{i}y_j$, mit $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. Dann ist

(i)

$$\begin{aligned} z_1^3 - \overline{z}_1^3 &= z_1^3 - \overline{z_1^3} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_1^3) = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(x_1^3 + 3x_1^2y_1\mathrm{i} - 3x_1y_1^2 - \mathrm{i}\,y_1^3) \\ &= 2\mathrm{i}(3x_1^2y_1 - y_1^3) \end{aligned}$$

(ii) $\mathrm{Re}(z_1z_2) = \mathrm{Re}\big(x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)\big) = x_1x_2 - y_1y_2$

(iii)

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\Big(\frac{z_1^2}{z_2}\Big) &= \mathrm{Im}\Big(\frac{z_1^2\overline{z}_2}{|z_2|^2}\Big) = |z_2|^{-2}\mathrm{Im}\big((x_1^2 + 2\mathrm{i}x_1y_1 - y_1^2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)\big) \\ &= |z_2|^{-2}(2x_1x_2y_1 - x_1^2y_2 + y_1^2y_2) \\ &= \frac{2x_1x_2y_1 - x_1^2y_2 + y_1^2y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

(iv)

$$\Big(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\Big)^6 = \Big(\frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1+1}\Big)^6 = \Big(\frac{1+2\mathrm{i}-1}{2}\Big)^6 = (\mathrm{i})^6 = -1$$

(v)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Big(\frac{z_1^2}{1+\mathrm{i}}\Big)+\mathrm{Im}\Big(\frac{z_1^2}{1+\mathrm{i}}\Big) &= \mathrm{Re}\Big(\frac{z_1^2(1-\mathrm{i})}{1+1}\Big)+\mathrm{Im}\Big(\frac{z_1^2(1-\mathrm{i})}{1+1}\Big)\\
&= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\big((x_1^2+2\mathrm{i}x_1y_1-y_1^2)(1-\mathrm{i})\big)\\
&\qquad +\tfrac{1}{2}\mathrm{Im}\big((x_1^2+2\mathrm{i}x_1y_1-y_1^2)(1-\mathrm{i})\big)\\
&= \tfrac{1}{2}\big(x_1^2-y_1^2+2x_1y_1\big)+\tfrac{1}{2}\big(-x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\big)\\
&= 2x_1y_1
\end{aligned}$$

9.3 Nach Voraussetzung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen, $a_n \in \mathbb{C}$.

(i) Die Äquivalenz der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 und der Nullfolgeneigenschaft von $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt unmittelbar aus der Definition der Konvergenz und aus der Gleichheit $|\,|a_n|-0| = |a_n - 0|$.

(ii) Wegen

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} s_k &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\big(\mathrm{Re}(a_n)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a_n)\big) && (1)\\
&= \lim_{k\to\infty}\big(\sum_{n=1}^{k}\mathrm{Re}(a_n)+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{k}\mathrm{Im}(a_n)\big) && (2)\\
&= \lim_{k\to\infty}\big(\mathrm{Re}(\sum_{n=1}^{k}a_n)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\sum_{n=1}^{k}a_n)\big) && (3)\\
&= \lim_{k\to\infty}\big(\mathrm{Re}(s_k)+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(s_k)\big) && (4)\\
&= \lim_{k\to\infty}\mathrm{Re}(s_k)+\mathrm{i}\lim_{k\to\infty}\mathrm{Im}(s_k) && (5)
\end{aligned}$$

ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ äquivalent zur Konvergenz ihrer Realteile und Imaginärteile. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehungen $\mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(\overline{a}_n)$ und $\mathrm{Im}(a_n) = -\mathrm{Im}(\overline{a}_n)$ gelten, folgt aus zu (1) analogen Gleichheit, dass auch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a}_n$ äquivalent ist zur Konvergenz der Realteile und Imaginärteile von $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a}_n$. Somit können wir die Äquivalenz der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zur

Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n$ folgern, und die Gültigkeit von

$$\overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} = \overline{\lim_{k\to\infty} s_k} = \lim_{k\to\infty} \overline{s}_k = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n,$$

wobei $\overline{s}_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \big(\mathrm{Re}(a_n) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(a_n)\big)$ ist.

9.4 Es war das Konvergenzverhalten der untenstehenden Folge und Reihe zu überprüfen.

(i) Es gilt

$$a_n := \frac{n + \mathrm{i}^n}{n} = 1 + \frac{\mathrm{i}^n}{n}.$$

Da $|\mathrm{i}^n| = |\mathrm{i}|^n = 1^n = 1$ ist, konvergiert der Betrag

$$\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

und, gemäss Teil (i) der Aufgabe 9.3, auch die Folge $(\mathrm{i}^n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Null. Somit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\mathrm{i}^n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n} = 1.$$

(ii) Wir schreiben die gegebene Reihe um, indem wir gerade und ungerade Summanden trennen,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n-1}}{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{i}^{2n}}{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} - \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1},
\end{aligned}$$

wobei wir $\mathrm{i}^{2n} = (\mathrm{i}^2)^n = (-1)^n$ und $1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$ verwendet haben. Die beiden Reihen auf der rechten Seite sind dann von der Form der alternierenden Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, mit $a_n = 1/2n \geq 0$ beziehungsweise

$a_n = 1/(2n-1) \geq 0$. Da diese a_n monoton abfallen, $a_{n+1} \leq a_n$, sowie $\lim_{n\to\infty} 1/2n = \lim_{n\to\infty} 1/(2n-1) = 0$ ist, können wir die Ergebnisse der Aufgabe T8.3 anwenden und die Konvergenz der beiden Reihen auf der rechten Seite folgern. Somit konvergiert auch die Reihe auf der linken Seite.
Zur Aufgabe T8.3: Dort wurde die Konvergenz der alternierenden Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

gezeigt, wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von nichtnegativen a_n monoton fallend ist, i.e., $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ erfüllt. Für den Beweis wurde die Monotonie und die Beschränkheit der ungeraden und geraden Partialsummen benutzt, d.h., dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_0 - a_1 = s_1 \leq s_{2k+1} = s_{2k+2} - a_{2k+2} \leq s_{2k+2} \leq s_0 = a_0$$

mit $s_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$. Des weiteren ging in den Beweis ein, dass wegen

$$s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1}$$

und der vorausgesetzten Nullfolgeneigenschaft der $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die geraden und ungeraden Teilfolgen der Partialsummen gegen den gleichen Limes konvergieren, $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = 0$.