Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
6. 12. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 7

7.1 Wir betrachten eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit reellen Folgengliedern.

(i) Sei $a_n := 1+\frac{2}{n}(-1)^n$. Für $\epsilon > 0$ wählen wir ein $N \in \mathbb{N}$, welches $N > 4/\epsilon$ erfüllt. Dann können wir für $n, m \geq N$ abschätzen,

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= \left|1 - \frac{2}{n}(-1)^n - \left(1 - \frac{2}{m}(-1)^m\right)\right| \\
&= 2\left|\frac{(-1)^m}{m} - \frac{(-1)^n}{n}\right| \\
&= 2\left|\frac{n-(-1)^{m-n}m}{m\cdot n}\right| \\
&\leq 2\,\frac{2\max\{n,m\}}{m\cdot n} \\
&= \frac{4}{\min\{m,n\}} \\
\leq \tfrac{4}{N} &< \epsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir $|n\pm m| \leq n+m \leq 2\max\{n,m\}$ und, für die letzte Gleichheit, die Fallunterscheidung $\max\{n,m\} = n$ oder $\max\{n,m\} = m$ benutzt haben. Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge.

(ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sei konvergent. Dann bildet die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ eine Cauchy Folge; also können wir für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $k, m \geq N$ gilt

$$\begin{aligned}
\epsilon &> |s_k - s_m| \\
&= |\sum_{n=0}^{k} a_n - \sum_{n=0}^{m} a_m| \\
&= |\sum_{n=\min\{k,m\}+1}^{\max\{k,m\}} a_n|.
\end{aligned}$$

Wählen wir nun $m = k+1$, dann folgt weiterhin

$$\epsilon > \Big| \sum_{n=k+1}^{k+1} a_n \Big| = |a_{k+1}|,$$

welches bedeutet, dass die $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge bilden müssen.

(iii) Wie in Teil (ii) der Aufgabe 6.1 gezeigt wurde, bilden die

$$a_n := \frac{P_N(n)}{Q_M(n)}$$

nur dann eine Nullfolge, wenn $N < M$ ist. Folglich kann wegen des obigen Resultates die Reihe für $N \geq M$ nicht konvergieren.

7.2 Sei die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $a_k := \big(1 + \frac{1}{k}\big)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert. Mithilfe des Binomialtheorems Satz 2.27 schreiben wir

$$\begin{aligned}
\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \Big(\frac{1}{k}\Big)^m \\
&= 1 + k\frac{1}{k} + \frac{1}{2}k(k-1)\frac{1}{k^2} + \frac{1}{6}k(k-1)(k-2)\frac{1}{k^3} + \ldots + \frac{1}{k^k} \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) + \frac{1}{3!}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{2}{k}\Big) + \ldots \\
&\qquad + \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(1 - \frac{k-1}{k}\Big) \\
&\to \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \qquad \text{wenn } k \to \infty \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass für $\ell, m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty}\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\cdot\Big(1-\frac{2}{k}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\frac{m-1}{k}\Big)\frac{1}{m!}=\frac{1}{m!}$$

für jeden einzelnen Summanden gilt.

7.3 Die Volumendifferenz $V_{n+1}-V_n$ der nach $n+1$ Zeiteinheiten erzeugten Verbindung sei gegeben durch

$$V_{n+1}-V_n=\frac{1}{(n+2)(n+4)}.$$

(i) Sei $V_0>0$ das Anfangsvolumen. Das Volumen nach n Zeiteinheiten ergibt sich durch Addition der Volumendifferenzen

$$\begin{aligned} V_n &= V_0+\sum_{k=0}^{n-1}\big(V_{k+1}-V_k\big). \\ &= V_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+2)(k+4)}. \end{aligned}$$

Für das Volumen V_∞ von unendlich langen Zeiten müssen wir die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)(k+4)}$$

untersuchen.

(ii) Wie in Beispiel 2.45 führen wir eine Partialbruchzerlegung durch

$$\frac{1}{(k+2)(k+4)}=\frac{A}{k+2}+\frac{B}{k+4},$$

wobei sich die Koeffizienten A, B aus der Gleichung

$$1=(k+4)A+(k+2)B=(A+B)k+4A+2B$$

(und somit $A+B=0$, $4A+2B=1$) zu $B=-A$ und $A=1/2$ ergeben. Für die Summe folgt daraus (mithilfe der Umbenennung $k=m+2$ in der ersten Summe auf der rechten Seite)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+4)} &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+4}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+4} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+4}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\Big)
\end{aligned}
$$

und im Limes $n \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)(k+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}.$$

Somit erhalten wir ein endliches Volumen nach unendlich langer Reaktionszeit, d.h., $V_\infty = V_0 + \frac{5}{12}$.