Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Abgabetermin:
6. 12. 2017 bis 10:30

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Übungsaufgaben, Woche 7

7.1 (8 Punkte) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit reellen Folgengliedern.

(i) Überprüfen Sie, ob für $n \in \mathbb{N}$ durch $a_n := 1 + \dfrac{2}{n}(-1)^n$ eine Cauchyfolge definiert wird.

(ii) Zeigen Sie, dass die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ impliziert, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(iii) Seien P_N, Q_M Polynome $P_N(x) := \sum_{k=0}^{N} p_k x^k$ und $Q_M(x) := \sum_{k=0}^{M} q_k x^k$ mit $p_N \neq 0$ und $q_M \neq 0$. Wir nehmen an, dass $Q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so dass wir definieren können

$$a_n := \frac{P_N(n)}{Q_M(n)}.$$

Sei $N \geq M$. Kann dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren?

7.2 (8 Punkte) Wir definierten die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $a_k := \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Gleichheit

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}.$$

7.3 (8 Punkte) In einer chemischen Reaktion nehme der Zuwachs $V_{n+1} - V_n$ des Volumens V_n der nach n Zeiteinheiten erzeugten Verbindung in folgender Weise ab,

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{(n+2)(n+4)}.$$

(i) Formulieren Sie die zeitliche Entwicklung des Volumens als Reihe, wobei das Anfangsvolumen $V_0 > 0$ sei.

(ii) Untersuchen Sie die Reihe auf ihre Konvergenzeigenschaft und stellen Sie fest, wie gross das Volumen V_∞ im Limes $n \to \infty$ unendlich langer Reaktionszeiten wird.

Für alle Aufgaben gilt: Begründen Sie jeden Schritt in Ihren Lösungen!

Abgabe in den entsprechenden und gekennzeichneten Abgabekästen im ersten Stock des Mathematischen Institutes (in der Nähe des Bibliothekeingangs).