Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
29. 11. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 6

6.1 Für $N, M \in \mathbb{N}$ seien die Polynome $P_N(x) := \sum_{i=0}^{N} p_i x^i$ und $Q_M(x) := \sum_{i=0}^{M} q_i x^i$ gegeben, wobei die Koeffizienten $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$ sein sollen und $p_N \neq 0$ und $q_M \neq 0$ gelten soll. Ausserdem soll $Q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sein. Dann lässt sich eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \frac{P_N(n)}{Q_M(n)}$$

erklären.
Mithilfe der Polynome $\tilde{P}_N(x) := \sum_{i=0}^{N} p_{N-i}\, x^i$ und $\tilde{Q}_M(x) := \sum_{i=0}^{M} q_{M-i}\, x^i$ können wir nun P_N und Q_M umschreiben als

$$P_N(x) = x^N \tilde{P}_N\Big(\frac{1}{x}\Big), \qquad Q_M(x) = x^M \tilde{Q}_M\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

wodurch die Folgenglieder zu

$$a_n = n^{N-M} \frac{\tilde{P}_N(1/n)}{\tilde{Q}_M(1/n)} \tag{1}$$

werden. Des weiteren gilt nach Satz 2.37

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{P}_N\Big(\frac{1}{n}\Big) = p_N, \qquad \lim_{n\to\infty} \tilde{Q}_M\Big(\frac{1}{n}\Big) = q_M,$$

so dass aus Satz 2.28 folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{P}_N(1/n)}{\tilde{Q}_M(1/n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} \tilde{P}_N(1/n)}{\lim_{n\to\infty} \tilde{Q}_M(1/n)} = \frac{p_N}{q_M}. \tag{2}$$

(i) Falls $N > M$ ist, dann gilt $N - M > 0$ und n^{N-M} wird beliebig gross für $n \to \infty$, während der Bruch in (1) beschränkt bleibt und gemäss (2) und der Voraussetzung $p_N \neq 0$ zu einer Zahl ungleich Null konvergiert. Somit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und divergiert nach ∞ für $p_N/q_M > 0$, beziehungsweise nach $-\infty$ falls $p_N/q_M < 0$ ist.

(ii) Falls $N < M$ ist, dann gilt $N-M < 0$ und $n^{N-M} \to 0$ für $n \to \infty$. Wir können Teil 2 von Satz 2.37 anwenden und folgern, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist.

(iii) Falls $N = M$ ist, dann ist $N - M = 0$ und $n^{N-M} = 1$. Gemäss (2) gilt dann $\lim_{n\to\infty} a_n = p_N/q_M$.

6.2 Sei $a_{n+1} := pa_n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $a_1 \neq 0$ und $p \in \mathbb{Q}$. Dann ist $a_2 = pa_1$, $a_3 = pa_2 = p^2 a_1$, etc., so dass sich

$$a_n = p^n a_0$$

ergibt. Der Fall $p = 1$ entspricht dann der konstanten Folge $(a_0, a_0, \ldots)$, welche $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ erfüllt. Falls $p > 1$ ist, dann gilt $s := p - 1 > 0$ und

$$|a_n| = p^n |a_0| = (1+s)^n |a_0| \geq (1+ns)|a_0|,$$

wobei wir die Abschätzung aus Aufgabe 4.3 verwendet haben. Da für $n \to \infty$ die rechte Seite obiger Ungleichung auch nach Unendlich strebt, ist die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und folglich divergent, wobei $a_n \to \infty$ wenn $a_1 > 0$ und $a_n \to -\infty$ wenn $a_1 < 0$ gilt.
Sei nun $1 > p = m/\ell$ mit $m, \ell \in \mathbb{N}$. Da $m < \ell$ ist, können wir schreiben $\ell = m + k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Ergebnisse von Aufgabe 4.3 gilt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{p^N} = \left(1+\frac{k}{m}\right)^N \geq 1+N\frac{k}{m} \quad \text{und damit} \quad p^N = \frac{1}{\left(1+\frac{k}{m}\right)^N} \leq \frac{1}{1+N\frac{k}{m}}. \tag{3}$$

Für $\epsilon > 0$ wählen wir nun ein hinreichend grosses $N \in \mathbb{N}$, welches

$$\frac{1}{\epsilon} < 1 + N\frac{k}{m} \tag{4}$$

erfüllt. Dann erhalten wir mithilfe von (3) und (4) für alle $n \geq N$,

$$\begin{aligned} p^n < p^N &= \left(\frac{m}{m+k}\right)^N \\ &= \frac{m^N}{m^N\left(1+\frac{k}{m}\right)^N} \\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{k}{m}\right)^N} \leq \frac{1}{1+N\frac{k}{m}} < \epsilon. \end{aligned}$$

Dieses bedeutet, dass $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und somit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \lim_{n\to\infty} p^n = a_1 \lim_{n\to\infty} p^n = 0$ gilt.

6.3 Sei $m \in \mathbb{N}$.

(i) Wir beweisen

$$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{m}{2}.$$

durch vollständige Induktion über $m \in \mathbb{N}$. Für $m = 1$ wird die Summe gleich $3/2$, während auch die linke Seite gleich $3/2$ ist. Wir nehmen nun die Gültigkeit der Ungleichung für beliebige m an und betrachten den Nachfolger $m + 1$. Da für alle $0 < k < 2^m$

$$\frac{1}{2^m + k} \geq \frac{1}{2^{m+1}}$$

ist, folgt

$$\frac{1}{2^m+1} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}} > 2^m \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2}.$$

Daher können wir mithilfe der Induktionsannahme abschätzen

$$\sum_{k=1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} + \frac{1}{2^m+1} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{m}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m+1}{2}.$$

(ii) Aus Teil (i) wissen wir, dass für $n \geq 2^m$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{m}{2}.$$

Da wir m beliebig anwachsen lassen können, ist die Folge der Partialsummen und damit auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ unbeschränkt und somit divergent.

6.4 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge.

(i) Nach Voraussetzung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt, d.h., es gibt ein positives $b \in \mathbb{R}$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ sich die Folgenglieder durch $|a_n| \leq b$ abschätzen lassen. In Beispiel 2.45 wurde bereits die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ bewiesen. Letzteres bedeutet, dass sich für jedes $\epsilon > 0$ und damit auch für $\epsilon/b > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden lässt, so dass für alle $m \geq N$ gilt

$$s_\infty - s_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \frac{\epsilon}{b},$$

wobei s_m die m-te Partialsumme sein soll. Wir schätzen nun ab unter Verwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} - \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{n^2}| = |\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}| &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |\frac{a_n}{n^2}| \\ &\leq b \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\leq b \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} \\ &= b \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \epsilon \end{aligned}$$

für alle $k > N+1$ mit dem oben gewählten N. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$.

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Als Beispiel wählen wir die konstante Folge $a_n := 1$. Wie wir in Aufgabe 6.3 (ii) gezeigt hatten, konvergiert jedoch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

nicht, so dass die Behauptung im Allgemeinen nicht korrekt ist.