Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Abgabetermin:
29. 11. 2017 bis 10:30

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Übungsaufgaben, Woche 6

6.1 (6 Punkte) Wir betrachten Polynome $P_N(x) := \sum_{i=0}^{N} p_i x^i$ und $Q_M(x) := \sum_{i=0}^{M} q_i x^i$ mit Koeffizienten $p_i, q_i \in \mathbb{Q}$, wobei $N, M \in \mathbb{N}$ und $p_N \neq 0$ und $q_M \neq 0$ sein sollen. Wir nehmen an, dass $Q(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \frac{P_N(n)}{Q_M(n)}$$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Falls $N > M$ ist, dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und wenn $n \to \infty$, dann gilt $a_n \to \infty$ für $p_N \cdot q_M > 0$, oder $a_n \to -\infty$ für $p_N \cdot q_M < 0$.

(ii) Falls $N < M$ ist, dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(iii) Im Falle $N = M$ konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\lim_{n\to\infty} a_n = p_N/q_M$.

6.2 (5 Punkte) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_{n+1} = pa_n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $a_1 \neq 0$ und $p \in \mathbb{Q}$. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von $p \in \mathbb{Q}$, $p \geq 0$.

6.3 (6 Punkte) Sei $m \in \mathbb{N}$.

(i) Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{m}{2}.$$

(ii) Was folgt aus dieser Ungleichung für die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad ?$$

6.4 (7 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Folge. Dann konvergiert (in $\mathbb{R}$) die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}.$$

(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Für alle Aufgaben gilt: Begründen Sie jeden Schritt in Ihren Lösungen!

Abgabe in den entsprechenden und gekennzeichneten Abgabekästen im ersten Stock des Mathematischen Institutes (in der Nähe des Bibliothekeingangs).