Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
22. 11. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 5

5.1 Um eine vollständige Induktion über $N \in \mathbb{N}$ durchzuführen, sei zuerst $N = 1$; dann ist die Gleichheit $\sum_{j=1}^{1} j^3 = 1^3 = 1 = 1^2 = (\sum_{j=1}^{1} j)^2$ offensichtlich. Die Induktionsannahme lautet nun $\sum_{j=1}^{N} j^3 = (\sum_{j=1}^{N} j)^2$, und wir müssen damit den Fall $N+1$ beweisen. Hierzu benutzen wir das Resultat von Beispiel 2.25, wonach $\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N}{2}\big(N+1\big)$ ist. Es gilt unter Verwendung des Binomialsatzes

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{j=1}^{N+1} j\Big)^2 &= \Big(\sum_{j=1}^{N} j + N + 1\Big)^2 \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{N} j\Big)^2 + 2(N+1)\sum_{j=1}^{N} j + (N+1)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} j^3 + 2(N+1)\sum_{j=1}^{N} j + (N+1)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} j^3 + 2(N+1)\frac{N}{2}(N+1) + (N+1)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} j^3 + N(N+1)^2 + (N+1)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} j^3 + (N+1)(N+1)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N+1} j^3,
\end{aligned}
$$

wobei für die dritte Gleichheit die Induktionsannahme verwendet wurde.

5.2 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

(i) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei für alle $b \in \mathbb{N}$ definiert durch $b_n := a_{3n+1}$. Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu $a \in \mathbb{Q}$ konvergiert, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a - a_n| < \epsilon$ erfüllt ist. Diese Ungleichung ist dann natürlich auch für a_{3n} und damit auch für b_n erfüllt, $|a - b_n| < \epsilon$, so dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert a konvergiert.
Für den Fall dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, betrachten wir als Beispiel die divergierende Folge definiert für alle $n \in \mathbb{N}$ durch $a_{3n} := 3n$, $a_{3n+1} := 1$, $a_{3n+2} := n + 2$, und $a_1 := 1$, $a_2 := 2$. Dann ist $b_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass offensichtlich die konstante Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht divergiert, sondern gegen den Grenzwert 1 konvergiert.

(ii) Angenommen, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert zu $a \in \mathbb{Q}$. Dann kann man für jedes $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n > n_0$ die Ungleichung $|a - a_n| < \epsilon/3$ erfüllt ist. Des weiteren lässt sich ein n_0' finden, so dass für alle $n > n_0'$ die Ungleichung $|a|/n < \epsilon/3$ gültig ist. Wir setzen $N := \max\{n_0, n_0'\}$; dann können wir für die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_{n+1} + \frac{1}{n}a_n$ und alle $n \geq N$ abschätzen

$$\begin{aligned}
|c_n - a| &= |a_{n+1} + \frac{1}{n}a_n - a| \\
&= |a_{n+1} - a + \frac{1}{n}(a_n - a + a)| \\
&\leq |a_{n+1} - a| + \frac{1}{n}\,|a_n - a| + \frac{|a|}{n} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3n} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,
\end{aligned}$$

womit auch die Konvergenz der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu dem Grenzwert a gezeigt ist.
Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unbeschränkte Folge. Wir nehmen an, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt bleibt, um dann einen Widerspruch zu erhalten. Wegen der angenommenen Beschränktheit von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein $c > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|c_n| \leq c$. Folglich gilt auch

$$\left|a_{n+1}\right| = \left|c_n - \frac{1}{n}a_n\right| \leq \left|c_n\right| + \frac{1}{n}\left|a_n\right| \tag{1}$$

Wir benutzen diese Ungleichung (1), um mittels Induktion für $n \geq 2$ zu zeigen

$$|a_n| \leq 2c + |a_1|. \tag{2}$$

Für $n = 2$ folgt dieses direkt aus (1), wenn dort $n = 1$ gesetzt wird. Nehmen wir die Gültigkeit von (2) für beliebige $n \geq 2$ an und betrachten den Nachfolger $n + 1$. Dann erhalten wir

$$|a_{n+1}| \leq |c_n| + \frac{1}{n}|a_n| \leq c + \frac{1}{n}\big(2c + |a_1|\big) = \big(1 + \frac{2}{n}\big)c + \frac{|a_1|}{n} \leq 2c + |a_1|,$$

da ja $n \geq 2$ ist, und womit die Induktion abgeschlossen und (2) bewiesen ist. Die obere Schranke in (2) bedeutet aber, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, im Gegensatz zur vorausgesetzen Unbeschränktheit von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Somit ist unsere Annahme der Beschränktheit von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falsch, und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss unbeschränkt und damit divergent sein.
Sei schliesslich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent; es gibt dann ein $a > 0$, so dass $|a_n| \leq a$ und somit

$$\Big|\frac{1}{n}\,a_n - 0\Big| = \frac{1}{n}\big|a_n\big| \leq \frac{a}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Infolgedessen sind $(a_n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(|a_n|/n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen. Nehmen wir an, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert; dann muss aber wegen $c_n - c = a_{n+1} - c + a_n/n$ und

$$\big|a_{n+1} - c\big| - \frac{1}{n}\big|a_n\big| \leq \big|a_{n+1} - c + \frac{1}{n}a_n\big| = \big|c_n - c\big| \leq \big|a_{n+1} - c\big| + \frac{1}{n}\big|a_n\big|,$$

oder, umgestellt,

$$\big|c_n - c\big| - \frac{1}{n}\big|a_n\big| \leq \big|a_{n+1} - c\big| \leq \big|c_n - c\big| + \frac{1}{n}\big|a_n\big|,$$

auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, was aber im Gegensatz zur angenommenen Divergenz dieser Folge steht. Damit ist die Annahme der Konvergenz von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ falsch, und die Divergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ impliziert die Divergenz der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(iii) Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für alle $b \in \mathbb{N}$ durch $d_n := (-1)^n a_n$ erklärt. Sei nun die konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann wird $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zur alternierenden Folge $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, welche nicht konvergiert. Umgekehrt sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die nichtkonvergente alternierende Folge $a_n := (-1)^n$; dann wird $d_n = (-1)^{2n} = 1$ zur konstanten Folge, welche offensichtlich die 1 als Grenzwert besitzt. Somit besteht für $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kein Zusammenhang mit der Konvergenz oder Divergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5.3 (a) Wir betrachten die konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ist.

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konstante Folge mit $a_n := 1$ und $a = 1$. Für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sei die Nullfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n := n_0/(n+1)$. Dann gilt für alle $n < n_0$, dass $a_n = 1 \leq n_0/(n+1) = b_n$ erfüllt ist, aber im Limes die umgekehrte Ungleichung wahr ist,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 > \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

(ii) Zunächst betrachten wir eine Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit nichtnegativen Gliedern, $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und nehmen an, dass die Folge konvergiert mit $c := \lim_{n\to\infty} c_n$ und dass $c < 0$ ist. Wir wählen $\epsilon := |c|/2$; wegen der Konvergenz muss dann für alle hinreichend grosse n (d.h., $n > n_0$ für ein (von ϵ abhängiges) $n_0 \in \mathbb{N}$) die Ungleichung $c_n - c < \epsilon = |c|/2 = -c/2$ gelten; durch Umstellung wird diese zu $c_n < c/2 < 0$, was im Gegensatz zur Annahme $c_n \geq 0$ steht. Also muss $c \geq 0$ sein.
Jetzt setzen wir $c_n := b_n - a_n \geq 0$. Aus dem Vorausgegangenen folgt, dass $0 \leq \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n$ ist, folglich $\lim_{n\to\infty} b_n \geq \lim_{n\to\infty} a_n$.

(iii) Wir setzen $\tilde{a}_n := a_{7n}$ und $\tilde{b}_n := b_{2n}$. Dann gilt[1] $\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ sowie $\lim_{n\to\infty} \tilde{b}_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Wegen der Konvergenz sind die Voraussetzungen für die Anwendung von Teil (ii) oben auf die Folgen $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben, was auf $\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n \leq \lim_{n\to\infty} \tilde{b}_n$ und damit auf $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ führt.

[1] Dieses folgt wie in Aufgabe 5.2 (i): Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu $a \in \mathbb{Q}$ konvergiert, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n > n_0$ die Ungleichung $|a - a_n| < \epsilon$ erfüllt ist und damit auch gilt $|a - a_{7n}| < \epsilon$. Analog argumentiert man für die Konvergenz der b_{2n}.

5.4 Hier wollen wir die Folgen mithilfe direkter Umformungen untersuchen; eine einfachere Alternative ist die Verwendung des Satzes über Grenzwerte von Quotienten (Satz 2.38) und einer in T6.1 zu behandelnden speziellen Version dieses Satzes.

(i) Durch einfache Umformungen wird

$$a_n := \Big(n - \frac{2n+1}{n^2}\Big)\Big(1 + \frac{n-n^2+7}{n^2}\Big) = 1 + \frac{7}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{15}{n^3} - \frac{7}{n^4}$$

wobei die Terme mit den Faktoren $1/n^i$, $i = 1, 2, 3, 4$ Nullfolgen sind, so dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{15}{n^3} - \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^4} = 1$$

ist.

(ii) Da

$$\begin{aligned} b_n := \frac{3n^3-n+5}{(n+2)(n^2+1)} &= \frac{3n^3-n+5}{n^3+2n^2+n+2} \\ &= \frac{3n^3+2n^2+n+2-(2n^2+n+2)-n+5}{n^3+2n^2+n+2} \\ &= 3 + \frac{-2n^2-2n+3}{n^3+2n^2+n+2}, \end{aligned}$$

wobei der letzte Term eine Nullfolge ist wegen

$$\Big|\frac{-2n^2-2n+3}{n^3+2n^2+n+2}\Big| \leq \frac{2n^2+2n+3}{n^3+2n^2+n+2} \leq \frac{2n^2+2n+3}{n^3} = \frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}.$$

Somit konvergiert $b_n \to 3$ im Limes $n \to \infty$.

(iii) Wie zuvor können wir umformen,

$$\begin{aligned} c_n := \frac{(4n-\frac{3}{n})(n^2-1)}{n^3+(n^2+1)(1-n)} &= \frac{4n^4-7n^2+3}{n^3-n^2+n} \\ &= \frac{4n^4+n^3-n^2+n-(n^3-n^2+n)-7n^2+3}{n^3-n^2+n} \\ &= 4n + \frac{-n^3+n^2-8n+3}{n^3-n^2+n}, \end{aligned}$$

so dass c_n divergiert, da der letzte Term beschränkt ist:

$$\begin{aligned}\left|\frac{-n^3+n^2-8n+3}{n^3-n^2+n}\right| &\leq \frac{n^3+n^2+8n+3}{n^3-n^2+n} \\ &\leq \frac{11n^3}{n^3-n^2+n} = \frac{11n^2}{n^2-n+1}\end{aligned}$$

Für $n = 1$ ist dieses gleich 1, und für $n > 1$ können wir mit $k := n - 1$ weiter abschätzen

$$\begin{aligned}\frac{11n^2}{n^2-n+1} &\leq \frac{11n^2}{n^2-n} = \frac{11n}{n-1} \\ &= \frac{11(k+1)}{k} = 11 + \frac{1}{k} \leq 12.\end{aligned}$$

(b) Die gesuchte rekursive Relation für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ von Zellkulturgrössen ist von der Form $a_{n+1} = \big(r - \frac{n+1}{4n+2}\big)a_n$ für alle Zeiteinheiten $n = 0, 1, 2, \ldots$, mit $a_0 > 0$. Wegen $4n + 2 < 4n + 4$ ist

$$-\frac{n+1}{4n+2} < -\frac{1}{4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass für jedes $r \in \mathbb{Q}$ mit $r < 5/4$ und $r_0 := r - 1/4 < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung gilt

$$0 < r - \frac{n+1}{4n+2} < r_0 < 1.$$

Daher ist $a_{n+1} < r_0 a_n < r_0^2 a_{n-1} < \ldots < r_0^n a_0$, so dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ zu einer Nullfolge wird.
Falls $r > 5/4$ ist, dann suchen wir ein $n' \in \mathbb{N}$ so dass

$$r - \frac{n'+1}{4n'+2} = r - \frac{1}{4} - \frac{1}{4(n'+1)} > 1$$

gilt. Letzte Ungleichung wird durch Umformungen äquivalent zu

$$n' > \frac{1}{8r-10} - \frac{1}{2}.$$

Wir wählen nun ein $n' \in \mathbb{N}$, welches diese Ungleichung erfüllt; weiterhin gilt für alle $n > n'$

$$r - \frac{n+1}{4n+2} > r - \frac{n'+1}{4n'+2} > 1,$$

da

$$2n' < 2n \Leftrightarrow 4nn'+2n+4n'+2 < 4nn'+2n'+4n+2 \Leftrightarrow (4n'+2)(n+1) < (4n+2)(n'+1).$$

Somit wachsen spätestens ab n' alle Folgenglieder monoton an, und für $n > n'$ haben wir $a_{n+1} > p^{n-n'} a_{n'}$, wobei wir

$$p := r - \frac{n'+1}{4n'+2} > 1$$

gesetzt haben. Diese Folge ist von der Form der divergierenden geometrischen Folge[2], so dass also für $r > 5/4$ die Zellkultur nicht absterben wird.
Es bleibt noch die Situation mit $r = 5/4$ zu untersuchen. In diesem Fall ist

$$r - \frac{n+1}{4n+2} = \frac{8n+3}{8n+4},$$

und, wie man wie oben durch einfache Umformungen überprüfen kann, gilt

$$\frac{8\tilde{n}+3}{8\tilde{n}+4} < \frac{8n+3}{8n+4}$$

wenn $\tilde{n} > n$ ist. Somit sind die Folgenglieder monoton fallend,

$$0 < a_{n+1} = \frac{8n+3}{8n+4}\, a_n < a_n = \frac{8n-5}{8n-4}\, a_{n-1} < a_{n-1} < \ldots < a_0.$$

Wir betrachten die Teilfolge $b_n := a_{8n}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Diese Teilfolge erfüllt die Rekursion

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{n+3}{n+4}\, b_n = \frac{n+3}{n+4}\,\frac{n-1+3}{n-1+4}\, b_{n-1} = \frac{n+3}{n+4}\,\frac{n-1+3}{n-1+4}\,\frac{n-2+3}{n-2+4}\, b_{n-2} \\ &= \frac{n+3}{n+4}\,\frac{n+2}{n+3}\,\frac{n+1}{n+2}\, b_{n-2} \\ &= \frac{1}{n+4}\,\frac{n+1}{1}\, b_{n-2} = \frac{1}{n+4}\,\frac{n}{1}\, b_{n-3} = \ldots = \frac{1}{n+4}\,\frac{3}{1}\, b_0 = \frac{3}{n+4} a_0. \end{aligned}$$

Hieraus ersieht man, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ eine Nullfolge ist. Wegen der Monotonie $a_{n+1} < a_n$ muss deshalb ebenso $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ eine Nullfolge sein (für jedes n gibt es ja nur endlich viele k, so dass $a_k > b_n$ ist). Dieses bedeutet, dass auch für $r = 5/4$ die Zellkultur absterben wird.

[2] siehe auch Aufgabe 6.2