Mathematisches Institut der LMU | WS 2016/17
Prof. Dr. S. Morozov | Abgabetermin:
Dr. H. Hogreve | 22. 11. 2017 bis 10:30

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Übungsaufgaben, Woche 5

5.1 (6 Punkte) Überprüfen Sie, ob für alle $N \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\sum_{j=1}^{N} j^3 = \Big(\sum_{j=1}^{N} j\Big)^2$$

5.2 (6 Punkte) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Impliziert dann die Konvergenz beziehungsweise Divergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Konvergenz beziehungsweise Divergenz der untenstehenden Folgen?

(i) Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei für alle $b \in \mathbb{N}$ gilt $b_n := a_{3n+1}$.

(ii) Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei für alle $c \in \mathbb{N}$ gilt $c_n := a_{n+1} + \frac{1}{n} a_n$.

(iii) Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei für alle $b \in \mathbb{N}$ gilt $d_n := (-1)^n a_n$.

5.3 (6 Punkte) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Garantiert eine der folgenden Bedingungen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ gilt?

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n < n_0 : a_n \leq b_n)$

(ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N} : (\forall n > n_0 : a_n \leq b_n)$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N} : a_{7n} \leq b_{2n}$

5.4 (6 Punkte; Teil (b): 4 Bonuspunkte) (a) Untersuchen Sie, ob die untenstehenden Folgen konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(i)

$$\Big(n - \frac{2n+1}{n^2}\Big)\Big(1 + \frac{n - n^2 + 7}{n^2}\Big)$$

(ii)

$$\frac{3n^3 - n + 5}{(n+2)(n^2+1)}$$

(iii)

$$\frac{(4n - \frac{3}{n})(n^2 - 1)}{n^3 + (n^2+1)(1-n)}$$

(b) Eine Zellkultur habe zur Zeit 0 die Grösse $a_0 \in \mathbb{Q}$, $a_0 > 0$, und nach $n+1$ Zeiteinheiten sei ihre Grösse a_{n+1} das $\big(r - \frac{n+1}{4n+2}\big)$-fache ihrer Grösse a_n bei der Zeiteinheit n, wobei der Parameter $r \in \mathbb{Q}$ immer $r > \frac{1}{2}$ erfüllen muss, aber ansonsten durch die Bedingungen des Experimentes (wie beispielsweise die Temperatur) gesteuert werden kann. Formulieren Sie die Zeitentwicklung der Zellkultur durch eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, (d.h., drücken Sie a_{n+1} durch a_n aus), und untersuchen Sie, welche r man wählen darf, damit die Zellkultur für beliebig lange Zeiten nicht ausstirbt.

Für alle Aufgaben gilt: Begründen Sie jeden Schritt in Ihren Lösungen!

Abgabe in den entsprechenden und gekennzeichneten Abgabekästen im ersten Stock des Mathematischen Institutes (in der Nähe des Bibliothekeingangs).