Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Besperechungstermin:
14.11. bis 18. 11. 2016

# Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

## Beispielaufgaben für Tutorien, Woche 5

**T4.1** Zeigen Sie, dass es zu jeder rationalen Zahl $[(a,b)]_{\mathbb{Q}}$ ein und nur ein additives Inverses gibt.

**T4.2** Wir führen eine (“alternative Addition”) Verknüpfung $\uplus$ auf der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ein indem wir für $[(a_1,b_1)]_{\mathbb{Q}}, [(a_2,b_2)]_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ setzen

$$[(a_1,b_1)]_{\mathbb{Q}} \uplus [(a_2,b_2)]_{\mathbb{Q}} := [(a_1+a_2, b_1+b_2)]_{\mathbb{Q}}.$$

Ist diese Verknüpfung $\uplus$ wohldefiniert?

**T4.3** Besitzt die Gleichung $x \cdot x - 3/2 = 0$ eine Lösung in $\mathbb{Q}$, d.h., gibt es $x \in \mathbb{Q}$, welche diese Gleichung erfüllen?

**T4.4** Zerlegen Sie die untenstehenden rationalen Zahlen wie auf der rechten Seite von

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k}$$

wobei $n_i \neq n_j$ für alle $i \neq j$ und $k \in \mathbb{N}$ sein sollen.
**Beispiel:**

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.$$

(i) $\frac{5}{6}$, (ii) $\frac{5}{12}$, (iii) $\frac{13}{24}$.

**T4.5** Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir Potenzen $n^k$ einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ rekursiv durch $n^1 := n$ und $n^{(k+1)} := n \cdot n^k$. Überprüfen Sie, ob für die unten definierten Funktionen $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, 3$, es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $n_m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > n_m$, $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f_i(n) < \frac{1}{m}$.

(i)
$$f_1(n) := \frac{n!}{n^n}$$

(ii)
$$f_2(n) := \frac{(2n-2)(2n+1)}{4n+2} - \frac{n^2-2}{n+1}$$

(iii)
$$f_3(n) := \frac{3n - 3/n^2}{n^2 + 1/n}$$