Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
15. 11. 2016

# Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

## Beispielslösungen, Woche 4

**4.1** Nach Definition 2.12 ist für $z_i = [(a_i, b_i)] \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, das Produkt erklärt durch

$$z_1 \cdot_{\mathbb{Z}} z_2 = [(a_1, b_1)] \cdot_{\mathbb{Z}} [(a_2, b_2)] := [(a_1a_2 + b_1b_2,\ a_2b_1 + a_1b_2)]. \tag{1}$$

Seien $z_i = [(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i)]$ äquivalente Darstellungen der $z_i$, also

$$\begin{aligned} a_1 + \tilde{b}_1 &= \tilde{a}_1 + b_1 &(2)\\ a_2 + \tilde{b}_2 &= \tilde{a}_2 + b_2, &(3) \end{aligned}$$

und wir erhalten für das Produkt

$$z_1 \cdot_{\mathbb{Z}} z_2 = [(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)] \cdot_{\mathbb{Z}} [(\tilde{a}_2, \tilde{b}_2)] = [(\tilde{a}_1\tilde{a}_2 + \tilde{b}_1\tilde{b}_2,\ \tilde{a}_2\tilde{b}_1 + \tilde{a}_1\tilde{b}_2)]. \tag{4}$$

Um die Wohldefiniertheit der Multiplikation zu beweisen, müssen wir zeigen, dass die rechten Seiten von (1) und (4) gleich sind, d.h., dass die entsprechenden Darstellungen äquivalent sind,

$$a_1a_2 + b_1b_2 + \tilde{a}_2\tilde{b}_1 + \tilde{a}_1\tilde{b}_2 \stackrel{?}{=} \tilde{a}_1\tilde{a}_2 + \tilde{b}_1\tilde{b}_2 + a_2b_1 + a_1b_2. \tag{5}$$

Um $a_1$ aus (5) zu entfernen, benutzen wir (2), einmal multipliziert mit $a_2$, das andere Mal multipliziert mit $b_2$:

$$\begin{aligned} a_1a_2 + a_2\tilde{b}_1 &= \tilde{a}_1a_2 + a_2b_1 &(6)\\ a_1b_2 + \tilde{b}_1b_2 &= \tilde{a}_1b_2 + b_1b_2. &(7) \end{aligned}$$

Um diese Relationen auf (5) anwenden zu können, müssen wir zuvor auf beiden Seiten von (5) $a_2\tilde{b}_1 + \tilde{b}_1b_2$ addieren, so dass

Gleichung (5) $\Leftrightarrow$

$$a_1a_2+b_1b_2+\tilde{a}_2\tilde{b}_1+\tilde{a}_1\tilde{b}_2+a_2\tilde{b}_1+\tilde{b}_1b_2 \overset{?}{=} \tilde{a}_1\tilde{a}_2+\tilde{b}_1\tilde{b}_2+a_2b_1+a_1b_2+a_2\tilde{b}_1+\tilde{b}_1b_2. \quad (8)$$

Einsetzen von (6),(7) ergibt dann:

Gleichung (8) $\Leftrightarrow$

$$\tilde{a}_1a_2+a_2b_1+b_1b_2+\tilde{a}_2\tilde{b}_1+\tilde{a}_1\tilde{b}_2+\tilde{b}_1b_2 \overset{?}{=} \tilde{a}_1\tilde{a}_2+\tilde{b}_1\tilde{b}_2+a_2b_1+\tilde{a}_1b_2+b_1b_2+a_2\tilde{b}_1. \quad (9)$$

In dieser Gleichung können wir $a_2b_1+b_1b_2$ auf beiden Seiten "kürzen", so dass

Gleichung (9) $\Leftrightarrow$

$$\tilde{a}_1a_2 + \tilde{a}_2\tilde{b}_1 + \tilde{a}_1\tilde{b}_2 + \tilde{b}_1b_2 \overset{?}{=} \tilde{a}_1\tilde{a}_2 + \tilde{b}_1\tilde{b}_2 + \tilde{a}_1b_2 + a_2\tilde{b}_1. \quad (10)$$

Um noch $a_2$ aus (10) zu entfernen, verwenden wir (3), einmal multipliziert mit $\tilde{a}_1$, das andere Mal multipliziert mit $\tilde{b}_1$:

$$\tilde{a}_1a_2 + \tilde{a}_1\tilde{b}_2 = \tilde{a}_1\tilde{a}_2 + \tilde{a}_1b_2 \quad (11)$$
$$a_2\tilde{b}_1 + \tilde{b}_1\tilde{b}_2 = \tilde{a}_2\tilde{b}_1 + \tilde{b}_1b_2. \quad (12)$$

Wir addieren $\tilde{a}_1\tilde{b}_2 + \tilde{b}_1\tilde{b}_2$ auf beiden Seiten von (10),

Gleichung (10) $\Leftrightarrow$

$$\tilde{a}_1a_2+\tilde{a}_2\tilde{b}_1+\tilde{b}_1b_2+\tilde{a}_1\tilde{b}_2+\tilde{a}_1\tilde{b}_2+\tilde{b}_1\tilde{b}_2 \overset{?}{=} \tilde{a}_1\tilde{a}_2+\tilde{b}_1\tilde{b}_2+\tilde{a}_1b_2+a_2\tilde{b}_1+\tilde{a}_1\tilde{b}_2+\tilde{b}_1\tilde{b}_2, \quad (13)$$

um dann (11) und (12) einsetzen zu können,

Gleichung (13) $\Leftrightarrow$

$$\tilde{a}_1\tilde{a}_2+\tilde{a}_1b_2+\tilde{a}_2\tilde{b}_1+\tilde{a}_1\tilde{b}_2+\tilde{b}_1b_2+\tilde{b}_1\tilde{b}_2 \overset{?}{=} \tilde{a}_1\tilde{a}_2+\tilde{b}_1\tilde{b}_2+\tilde{a}_1b_2+\tilde{a}_2\tilde{b}_1+\tilde{b}_1b_2+\tilde{a}_1\tilde{b}_2. \quad (14)$$

Es sind offensichtlich beide Seiten von (14) gleich, womit aufgrund der Äquivalenz zu (5) gezeigt wurde, dass das Produkt $\cdot_{\mathbb{Z}}$ in der Tat unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

**4.2** Seien $x_i = [(a_i, b_i)]_{\mathbb{Q}}$, $i = 1, 2$, zwei rationale Zahlen, und ihre Summe gegeben durch

$$x_1 + x_2 = [(a_1, b_1)]_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} [(a_2, b_2)]_{\mathbb{Q}} := [(a_1b_2 + a_2b_1, b_1b_2)]_{\mathbb{Q}},$$

Seien $x_i = [(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i)]_{\mathbb{Q}}$ äquivalente Darstellungen von $x_i$, d.h., es gilt $a_i\tilde{b}_i = \tilde{a}_i b_i$ für $i = 1, 2$.

(i) Wir müssen zeigen, dass

$$[(a_1b_2 + a_2b_1, b_1b_2)]_{\mathbb{Q}} = [(\tilde{a}_1\tilde{b}_2 + \tilde{a}_2\tilde{b}_1, \tilde{b}_1\tilde{b}_2)]_{\mathbb{Q}},$$

erfüllt ist, also dass

$$(a_1b_2 + a_2b_1)\tilde{b}_1\tilde{b}_2 = (\tilde{a}_1\tilde{b}_2 + \tilde{a}_2\tilde{b}_1)b_1b_2$$

ist. Umformen der rechten Seite führt auf

$$(\tilde{a}_1\tilde{b}_2 + \tilde{a}_2\tilde{b}_1)b_1b_2 = \tilde{a}_1\tilde{b}_2b_1b_2 + \tilde{a}_2\tilde{b}_1b_1b_2 = \tilde{a}_1b_1b_2\tilde{b}_2 + \tilde{a}_2b_2b_1\tilde{b}_1$$

Nun können wir von den Äquivalenzrelationen $a_i\tilde{b}_i = \tilde{a}_ib_i$ Gebrauch machen, so dass

$$\tilde{a}_1b_1b_2\tilde{b}_2 + \tilde{a}_2b_2b_1\tilde{b}_1 = a_1\tilde{b}_1b_2\tilde{b}_2 + a_2\tilde{b}_2b_1\tilde{b}_1 = a_1b_2\tilde{b}_1\tilde{b}_2 + a_2b_1\tilde{b}_1\tilde{b}_2 = (a_1b_2 + a_2b_1)\tilde{b}_1\tilde{b}_2$$

identisch zu der linken Seite der zu beweisenden Gleichung wird.

(ii) Da in $\mathbb{Z}$ die Addition und die Multiplikation kommutativ sind, gilt $a_1b_2 + a_2b_1 = b_1a_2 + b_2a_1$ und $b_1b_2 = b_2b_1$, so dass daraus die Kommutativität

$$[(a_1, b_1)]_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} [(a_2, b_2)]_{\mathbb{Q}} = [(a_1b_2 + a_2b_1, b_1b_2)]_{\mathbb{Q}} = [(a_2b_1 + a_1b_2, b_2b_1)]_{\mathbb{Q}} = [(a_2, b_2)]_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} [(a_1, b_1)]_{\mathbb{Q}}$$

folgt.

**4.3** Es reicht aus, den allgemeineren Fall in Teil (ii) zu beweisen.

(i) Die Beziehung folgt, sobald man Teil (ii) gezeigt hat, wenn man in $(c+d)^n \geq c^n + ndc^{n-1}$ die Substitution $c := 1$ und $d := 1/a$ durchführt.

(ii) Als erstes bemerken wir, dass $(a+b)^n \geq a^n + nba^{n-1}$ äquivalent zu $a^n(1+b/a)^n \geq a^n(1+nb/a)$ ist. Daher reicht es, $(1+c)^n \geq 1+nc$ für alle $c > -1$ zu beweisen. Zu diesem Zweck führen wir eine Induktion über $n \in \mathbb{N}$ durch. Für $n = 1$ wird die Abschätzung zu $(1+c) \geq 1+c$, welche offensichtlich wahr ist. Nun nehmen wir an, dass $(1+c)^n \geq (1+nc)$ für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt. Wir müssen nun daraus schließen, dass dann auch $(1+c)^{n+1} \geq 1+(n+1)c$ gültig ist. Da aber nach Induktionsannahme $(1+c)^{n+1} = (1+c)(1+c)^n \geq (1+c)(1+nc)$ ist (wobei wir auch benutzen, dass $1+c > 0$ ist), und weiterhin $(1+c)(1+nc) = 1+nc+c+nc^2 = 1+(n+1)c+nc^2 \geq 1+(n+1)c$ gilt, folgt die gewünschte Ungleichung $(1+c)^{n+1} \geq 1+(n+1)c$.

**4.4** Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen.

(i) Durch einfache Umstellungen ist es offensichtlich, dass die behauptete Gleichheit äquivalent ist zu

$$\frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{m!\,(n-(m-1))!}. \tag{15}$$

Weiterhin läßt sich die linke Seite

$$L := \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

umformen zu

$$\begin{aligned} L &= n!\,\frac{m!\,(n-m)! + (m-1)!\,(n-m+1)!}{(m-1)!\,m!\,(n-m)!\,(n-m+1)!} \\ &= n!\,\frac{m\,(m-1)!\,(n-m)! + (m-1)!\,(n-m+1)(n-m)!}{(m-1)!\,m!\,(n-m)!\,(n-m+1)!} \\ &= n!\,\frac{(m-1)!\,(n-m)!\,(m+n-m+1)}{(m-1)!\,m!\,(n-m)!\,(n-m+1)!} \\ &= n!\,\frac{(n+1)}{m!\,(n-m+1)!}, \end{aligned}$$

welches dann die rechte Seite der obigen Gleichheit (15) ist. *Bemerkung:* Alternativ hätte man auch $m!\,(n-m+1)!$ als gemeinsamen Nenner nehmen können!)

(ii) Die Ungleichungen

$$1 - \frac{1}{m} < \frac{a+n}{b+n} < 1 + \frac{1}{m} \tag{16}$$

sind äquivalent zu

$$(m-1)(b+n) < m(a+n) < (m+1)(b+n),$$

und diese sind andererseits äquivalent zu

$$(m-1)b - ma < n \quad \wedge \quad ma - (m+1)b < n.$$

Die letzten beiden Ungleichung kann man äquivalenterweise zusammenfassen zu

$$m|a-b| < n + b.$$

Somit kann man beispielsweise $n_0 := m|a-b|$ wählen, damit für alle $n > n_0$ die Ungleichungen (16) erfüllt werden.