Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Abgabetermin:
15. 11. 2017 bis 10:30

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Übungsaufgaben, Woche 4

4.1 (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die in Definition 2.12 eingeführte Multiplikation $z_1 \cdot_{\mathbb{Z}} z_2$ von zwei ganzen Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ wohldefiniert ist, d.h., dass das Ergebnis unabhängig von den gewählten Repräsentanten (a_1, b_1) und (a_2, b_2) von z_1 beziehungsweise z_2 ist.

4.2 (6 Punkte) Seien $x_1 = [(a_1, b_1)]_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ und $x_2 = [(a_2, b_2)]_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ rationale Zahlen.

(i) Zeigen Sie, dass die in Satz 2.16 definierte Addition $+_{\mathbb{Q}}$ wohldefiniert (d.h., unabhängig von den gewählten Repräsentanten (a_i, b_i), $i = 1, 2$) ist.

(ii) Zeigen Sie des weiteren, dass $+_{\mathbb{Q}}$ kommutativ ist, also $x_1 +_{\mathbb{Q}} x_2 = x_2 +_{\mathbb{Q}} x_1$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ erfüllt ist.

4.3 (6 Punkte) Seien für $k \in \mathbb{N}$ die Potenzen x^k einer rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ rekursiv durch $x^0 := 1$, $x^1 := x$ und $x^{k+1} := x \cdot x^k$ definiert. Betrachtet werde eine von Null verschiedene rationale Zahl, $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, mit $\frac{1}{a} > -1$.

(i) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(1 + \tfrac{1}{a}\right)^n \geq 1 + \tfrac{n}{a}.$$

(ii) Überprüfen Sie, ob auch für $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a > 0$, $b > -a$ die Ungleichung $(a + b)^n \geq a^n + nba^{n-1}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gültig ist.

4.4 (6 Punkte) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen.

(i) Wir definieren die Fakultät "!" einer nichtnegativen ganzen Zahl $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ rekursiv durch $0! := 1$, und für alle $k \geq 0$ als $(k+1)! := (k+1)\, k!$. Sei $m \leq n$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Gleichheit:

$$\frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!} - \frac{(n+1)!}{m!\,(n-(m-1))!} = -\frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

(ii) Für $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die rationalen Zahlen

$$x_n := \frac{a+n}{b+n}.$$

Sei m eine beliebige natürliche Zahl; gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$, die Ungleichungen

$$1 - \frac{1}{m} < x_n < 1 + \frac{1}{m}$$

gelten?

Für alle Aufgaben gilt: Begründen Sie jeden Schritt in Ihren Lösungen!

Abgabe in den entsprechenden und gekennzeichneten Abgabekästen im ersten Stock des Mathematischen Institutes (in der Nähe des Bibliothekeingangs).