Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Besperechungstermin:
7.11. bis 11. 11. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielaufgaben für Tutorien, Woche 4

T3.1 Überprüfen Sie, ob durch die untenstehenden Zuordnungen Abbildungen von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ nach M definiert werden und untersuchen Sie gegebenenfalls diese Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität, und Bijektivität. Bestimmen Sie die entsprechenden Urbilder.

(i) $M := \mathbb{N}$ und $\forall n \in \mathbb{N} : f_1(n) := 3n + 1$; sei $K := \{3k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$; $f_1^{-1}(K) =?$

(ii) $M := \mathbb{N}$ und $\forall n \in \mathbb{N} : f_2(n) := n \cdot n$; sei $E_{\mathbb{N}} := \{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ und $O_{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \setminus E_{\mathbb{N}}$; $\quad f_2^{-1}(O_{\mathbb{N}}) =?$

(iii) $M := \{n \cdot n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ und $\forall n \in \mathbb{N} : f_3(n) := n \cdot n$; $\quad f_3^{-1}(\{1\}) =?$

T3.2 Seien A, B, M, N nichtleere Mengen, $M, N \subset B$, und f eine Abbildung von A nach B. Überprüfen Sie, ob gilt

$$f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N).$$

T3.3 Vereinfachen Sie die folgende Teilmenge der ganzen Zahlen:

$$\big(\mathbb{Z} \setminus \{3n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}\big) \setminus \{3n + 2 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

T3.4 Auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sei eine Relation $\leq$ für alle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$n_1 \leq n_2 :\Leftrightarrow \text{es gibt kein } m \in \mathbb{N} \text{ welches } n_1 = n_2 + m \text{ erfüllt.}$$

(i) Verifizieren Sie, dass durch $\leq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ definiert wird. Wie ist der Zusammenhang der hier definierten Relation $\leq$ mit der entsprechenden Definition 2.7 des Vorlesungsskriptes?

(ii)$*$ Wird $\mathbb{N}$ durch $\leq$ vollständig geordnet?

(ii)$*$ Zeigen Sie, dass jede nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ ein eindeutiges kleinstes Element bezüglich der Ordnung $\leq$ besitzt.

T3.5 Für $k \in \mathbb{N}$ sei $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ eine Menge mit den Teilmengen $M, N \subset A$. Mit $|B|$ wollen wir die Zahl der Elemente einer Menge bezeichnen (also, $|A| = k$ wenn alle a_i paarweise verschieden sind).

(i) Zeigen Sie dass $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$

(ii) Wir setzen $M \Delta N := (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $|M \Delta N| = |M| + |N| - 2|M \cap N|$