Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
08. 11. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 3

3.1 Sei ν die Nachfolgerabbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aus Axiom 2.1.

(i) Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $\nu^{\circ(k+1)} := \nu \circ \nu^{\circ k}$ mit $\nu^{\circ 1} := \nu$. Um die Behauptung zu beweisen, benutzen wir die vollständige Induktion nach k und beginnen mit $k = 1$. Dann ist die rechte Seite $\nu^{\circ 1}(1) = \nu(1)$ offensichtlich gleich der linken Seite $\nu(1)$. Nun nehmen wir an, dass für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt $\nu(k) = \nu^{\circ k}(1)$ und wollen zeigen, dass man daraus die analoge Beziehung $\nu(k+1) = \nu^{\circ(k+1)}(1)$ folgern kann. Es ist $\nu^{\circ(k+1)}(1) = \nu\big(\nu^{\circ k}(1)\big) = \nu\big(\nu(k)\big)$, wobei die letzte Gleichheit aus der Induktionsannahme folgt, und weiterhin ist $\nu\big(\nu(k)\big) = \nu(k) + 1 = 1 + \nu(k)$, wobei wir die Definition (2.1) auf $n := \nu(k)$ angewendet und dann die Kommutativität aus Lemma 2.6 benutzt haben. Zum Schluss verwenden wir noch (2.2) für $n := 1$, so dass $1 + \nu(k) = \nu(1 + k)$ folgt, welches gleich der linken Seite unserer Behauptung ist.

(ii) Sei $A := \{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \,|\, (n_1+n_2)+n_3 = n_1+(n_2+n_3)\}$, also die Menge aller n_1, n_2, n_3, für welche das Assoziativgesetz erfüllt ist. Mithilfe der vollständigen Induktion nach n_3 wollen wir zeigen, dass $A = \mathbb{N}$ ist. Dazu müssen wir zuerst überprüfen, ob $1 \in A$ ist, also ob $(n_1 + n_2) + 1 = n_1 + (n_2 + 1)$ für beliebige $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gilt: Nach (2.1) haben wir für die linke Seite $(n_1 + n_2) + 1 = \nu(n_1 + n_2)$, während die rechte Seite zu $n_1 + (n_2 + 1) = n_1 + \nu(n_2) = \nu(n_1 + n_2)$ wird, wobei wir (2.2) für die zweite Gleichheit angewendet haben.

Jetzt nehmen wir an, dass für beliebige $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3)$ für alle $n_3 \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und wollen daraus folgern, dass auch gilt $(n_1+n_2)+(n_3+1) = n_1+\big(n_2+(n_3+1)\big)$. Unter Benutzung von (2.1) wird die linke Seite zu $(n_1+n_2)+(n_3+1) = (n_1 + n_2) + \nu(n_3) = \nu\big((n_1 + n_2) + n_3\big)$, wobei die zweite Gleichheit aus (2.2) für $n := n_1+n_2$ und $k = n_3$ folgt. Aufgrund der Induktionsannahme ist weiterhin $\nu\big((n_1+n_2)+n_3\big) = \nu\big(n_1+(n_2+n_3)\big)$, und wegen (2.2) (mit $n := n_1$ und $k := n_2+n_3$) gilt $\nu\big(n_1+(n_2+n_3)\big) = n_1+\nu(n_2+n_3) = n_1+\big((n_2+n_3)+1\big)$, wobei die letzte Gleichheit aus (2.1) folgt. Jetzt benutzen wir, dass wir oben bereits gezeigt haben, dass $(n_2+n_3)+1 = n_2+(n_3+1)$ gilt (dieses war für n_1, n_2 gezeigt worden, kann aber hier verwendet werden, da n_1, n_2 beliebig sind), und erhalten schliesslich $n_1+\big((n_2+n_3)+1\big) = n_1+\big(n_2+(n_3+1)\big)$. Somit haben wir $(n_1+n_2)+(n_3+1) = n_1+\big(n_2+(n_3+1)\big)$ bewiesen, und aus (4) des Axioms 2.1 folgt, dass $A=\mathbb{N}$ ist.

3.2 Sei $W := \{w, f\}$.

(i) Vor Auswertung von g ist es nützlich, den logischen Ausdruck zur Vereinfachung umzuformen: $\big((x\wedge y)\vee(x\wedge\neg y)\big) \Leftrightarrow \big(x\wedge(y\vee\neg y)\big) \Leftrightarrow \big(x\wedge w\big) \Leftrightarrow x$, wobei eine Distributivrelation und $(y\vee\neg y)\Leftrightarrow w$ sowie $x\wedge w\Leftrightarrow x$ benutzt wurden. Somit ist $g\big((x,y)\big)=x$, woraus unmittelbar ersichtlich ist, dass g nicht injektiv sein kann (beide möglichen Werte für y werden auf das gleiche Bild abgebildet). Da $g\big((x,y)\big)=x$ aber für alle möglichen Werte von x, y definiert ist und einen eindeutigen Wert ergibt, ist g eine Abbildung von $W\times W$ nach W, welche auch surjektiv ist, da $g(w,y)\Leftrightarrow w$ und $g(f,y)\Leftrightarrow f$, so dass $g(W\times W)=W$ gilt. Da das Bild $g(w,y)$ für beide mögliche Werte von y gleich w ist, wird die gesuchte Urbildmenge zu $g^{-1}(\{w\}) = \{(w,w),(w,f)\} = \{w\}\times W$.

(ii) Die untenstehende Wahrheitstafel zeigt, dass der logische Ausdruck für h für alle möglichen Werte von x, y definiert ist und zu einem eindeutigen Bild von (x,y) führt, so dass durch h eine Abbildung definiert ist. Da beispielsweise (w,w) und (f,f) auf das gleiche Bild (nämlich f) führen, ist h nicht injektiv. Anderseits ist h surjektiv, da $h(W\times W)=W$ gilt (die rechte Spalte der Wahrheitstafel enthält w als auch f). Da, wie bereits erwähnt, (w,w) und (f,f) auf das Bild f

x	y	$x\wedge y$	$\neg(x\wedge y)$	$\neg y\Rightarrow x$	$\big(\neg(x\wedge y)\big)\Leftrightarrow\big(\neg y\Rightarrow x\big)$
w	w	w	f	w	f
w	f	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	f	f	w	f	f

führen (während das Bild von (w, f) und (f, w) durch w gegeben ist) erhalten wir für das gesuchte Urbild $h^{-1}(\{f\}) = \{(w, w), (f, f)\}$.

(iii) Wie nachfolgende Tabelle zeigt, ist H für alle möglichen Werte von x, y definiert und liefert in diesem Falle immer f als Bild. Somit ist H eine

x	y	$\Big(h\big((x,y)\big), h\big((x,y)\big)\Big)$	$h\Big(h\big((x,y)\big), h\big((x,y)\big)\Big)$
w	w	(f, f)	f
w	f	(w, w)	f
f	w	(w, w)	f
f	f	(f, f)	f

Abbildung, kann aber weder injektiv noch surjektiv sein. Da w nicht im Bildbereich von H liegt, gilt für das Urbild $H^{-1}(\{w\}) = \emptyset$.

3.3 Seien M, M', N, N' nichtleere Mengen.

(i) Da gemäß Annahme f_1, f_2 Abbildungen sind, wird auch durch F jedem $(m, n) \in M \times N$ ein eindeutiges Element $\Big(f_1\big((m,n)\big), f_2\big((m,n)\big)\Big) \in M' \times N'$ zugeordnet, also wird durch F eine Abbildung definiert.

(ii) Die Fragestellung kann man sich mithilfe des folgenden Diagramms veranschaulichen,

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{F} & M' \times N' \\ {\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_2'} \\ M & \xrightarrow{\quad g \quad} & N' \end{array}$$

wobei das gesuchte g dieses Diagramm "kommutativ" machen soll. Dieses ist jedoch mit den gegebenen p_1 und p_2' für beliebige f_1, f_2 nicht möglich; es ist

$$(m,n) \overset{F}{\mapsto} \Big(f_1\big((m,n)\big), f_2\big((m,n)\big)\Big) \mapsto p_2'\bigg(\Big(f_1\big((m,n)\big), f_2\big((m,n)\big)\Big)\bigg) = f_2\big((m,n)\big) = g\big(p_1\big((m,n)\big)\big) = g(m),$$

oder, anders ausgedrückt, für alle $(m, n) \in M \times N$ muss gelten

$$g\big(p_1\big((m,n)\big)\big) = p_2'\big(F\big((n,m)\big)\big)$$

und wegen $p'_2\big(\big(f_1\big((m,n)\big), f_2\big((m,n)\big)\big)\big) = f_2\big((m,n)\big)$ folgt die Gleichung

$$f_2\big((m,n)\big) = g(m).$$

In dieser Gleichung hängt die linke Seite im allgemeinen von n ab, die rechte Seite jedoch nicht. Als Beispiel könnte man $M := M' := \{m\}$, $N := N' := \{n\}$ mit $n \neq m$ nehmen, wobei $f_1\big((m,n)\big) := p_1(m) = m$ und $f_2\big((m,n)\big) := p'_2(n) = n$ sein sollen. Dann erhält man den Widerspruch $f_2\big((m,n)\big) = n = g(m) = m$.

3.4 Sei $M := \{a, b, c, d\}$ die Teilmenge des Alphabets mit den ersten vier Buchstaben, und N die Menge $N := \{\text{Apfel, Maus, Ananas, Cello}\}$. Wir setzen $f(a) :=$ Maus, $f(b) :=$ Ananas, $f(c) :=$ Apfel, $f(d) :=$ Cello, und

$$m_1 \preceq m_2 :\Leftrightarrow m_1 \text{ kommt nicht später im Alphabet als } m_2.$$

(i) Durch f wird jedem Element aus M eineindeutig ein Element aus N zugeordnet, wobei durch diese Zuordnung auch alle Elemente von N erfasst werden. Somit ist f eine injektive und surjektive Abbildung, also auch bijektiv.

(ii) Wegen der Bijektivität besteht für jedes $n \in N$ die Menge $f^{-1}(\{n\})$ nur aus einem Element, so dass wir die Definition von $\trianglelefteq$ umformen können zu

$$n_1 \trianglelefteq n_2 \Leftrightarrow (m_1 \preceq m_2, \text{ wobei } m_1 := f^{-1}(n_1) \text{ und } m_2 := f^{-1}(n_2)).$$

Damit wird unmittelbar klar, dass $\trianglelefteq$ eine Ordnungsrelation ist, da, wie bereits in Aufgabe 2.4 gezeigt, $\preceq$ eine Ordnungsrelation ist. Da des weiteren in Aufgabe 2.4 gezeigt wurde, dass für alle $m_1, m_2 \in M$ gilt $(m_1 \preceq m_2) \vee (m_2 \preceq m_1)$, folgt die analoge Behauptung für alle $n_1, n_2 \in N$ und $\trianglelefteq$, so dass $(N, \trianglelefteq)$ vollständig geordnet ist. In M ist a das kleinste Element bezüglich der Ordnung $\preceq$, da $a \preceq m$ für alle $m \in M$ gilt. Das größte Element von M bezüglich der Ordnung $\preceq$ ist durch d gegeben, da $m \preceq d$ für alle $m \in M$ erfüllt ist. Um das kleinste beziehungsweise größte Element von N bezüglich der Ordnung $\trianglelefteq$ zu finden, müssen wir (aufgrund der Definition von $\trianglelefteq$) das Bild von

a unter f beziehungsweise das Bild von d unter f nehmen; somit ist $f(a) =$ Maus das kleinste und $f(d) =$ Cello das größte Element in N bezüglich der Ordnung $\trianglelefteq$.

(iii) Es gilt zwar, dass Apfel $\sim$ Apfel und Ananas $\sim$ Ananas ist, aber weder Maus $\sim$ Maus noch Cello $\sim$ Cello ist gültig, so dass die Reflexivität für $\sim$ nicht erfüllt ist. Daher kann $\sim$ keine Äquivalenzrelation sein.

(iv) Aufgrund der Definition

$$m_1 \dot{\sim} m_2 :\Leftrightarrow f(m_1) \sim f(m_2)$$

gilt die Reflexivität, Symmetrie, und Transitivität von $\dot{\sim}$ auf M genau dann wenn diese Eigenschaften für $\sim$ auf N erfüllt sind. Da wir bereits bemerkt haben, dass für $\sim$ die Reflexivität nicht gültig ist, kann auch $\dot{\sim}$ keine Äquivalenzrelation sein.