Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Abgabetermin:
8. 11. 2017 bis 10:30

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Übungsaufgaben, Woche 3

3.1 (6 Punkte)

(i) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\nu^{\circ k}$ die k-fache Komposition der Nachfolgerabbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit sich, d.h. $\nu^{\circ 1} = \nu$, $\nu^{\circ 2} = \nu \circ \nu$ etc. Beweisen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\nu(k) = \nu^{\circ k}(1)$.

(i) Beweisen Sie die Assoziativität der Addition auf $\mathbb{N}$ (siehe Lemma 2.6).

3.2 (6 Punkte) Seien $W := \{w, f\}$ die Menge der Wahrheitswerte. Zeigen Sie, dass die untenstehenden Zuordnungen Abbildungen $W \times W \to W$ definieren; stellen Sie fest, ob diese Abbildungen injektiv oder surjektiv sind, und bestimmen Sie die genannten Urbilder:

(i) $g\big((x, y)\big) := (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$. $\qquad g^{-1}(\{w\}) =?$

(ii) $h\big((x, y)\big) := \neg(x \wedge y) \Leftrightarrow (x \Leftarrow \neg y)$. $\qquad h^{-1}(\{f\}) =?$

(iii) $H\big((x, y)\big) := h\Big(\big(h\big((x, y)\big),\, h\big((x, y)\big)\big)\Big)$. $\qquad H^{-1}(\{w\}) =?$

3.3 (4 Punkte) Seien M, N, M', N' nichtleere Mengen. Seien f_1 und f_2 Abbildungen auf $M \times N$,

$$f_1 : M \times N \to M', \qquad f_2 : M \times N \to N',$$

und $F : M \times N \to M' \times N'$ sei definiert durch

$$F\big((m, n)\big) := \Big(f_1\big((m, n)\big), f_2\big((m, n)\big)\Big).$$

(i) Ist F eine Abbildung?

(ii) Sei p_1 die Abbildung $M \times N \to M$ definiert durch

$$p_1\big((m,n)\big) := m,$$

und analog sei p_2' die Abbildung $M' \times N' \to N'$ definiert durch

$$p_2'\big((m',n')\big) := n'.$$

Gibt es dann für beliebige f_1, f_2 eine Abbildung $g : M \to N'$, so dass gilt:

$$g\Big(p_1\big((m,n)\big)\Big) = p_2'\Big(F\big((m,n)\big)\Big)?$$

3.4 (8 Punkte) Seien a, b, c, d die ersten vier Buchstaben des Alphabets, und $M := \{a, b, c, d\}$ die gleiche Menge wie in Aufgabe 2.4. Des weiteren sei N die Menge $N := \{\text{Apfel, Maus, Ananas, Cello}\}$. Wir setzen $f(a) :=$ Maus, $f(b) :=$ Ananas, $f(c) :=$ Apfel, $f(d) :=$ Cello.

(i) Ist durch f eine Abbildung $M \to N$ definiert? Ist f injektiv, surjectiv, bijektiv?

(ii) Wir definieren eine Relation auf N, N durch

$$n_1 \trianglelefteq n_2 :\Leftrightarrow \forall m_1 \in f^{-1}(\{n_1\}) \wedge \forall m_2 \in f^{-1}(\{n_2\}) : m_1 \preceq m_2.$$

Ist $\trianglelefteq$ eine Ordnungsrelation auf N, und, falls ja, wird N durch $\trianglelefteq$ vollständig geordnet? Gibt es dann kleinste und größte Elemente in N, d.h., existieren $n_{\min}$, $n_{\max}$ so dass für alle $n \in N$ gilt $n_{\min} \trianglelefteq n$ beziehungsweise $n \trianglelefteq n_{\max}$?

(iii) Sei M_{O} die Menge allen Obstes. Wird durch

$$n_1 \sim n_2 :\Leftrightarrow n_1, n_2 \in M_{\mathrm{O}}$$

eine Äquivalenzrelation auf N definiert? Welches wären dann die Äquivalenzklassen von $\sim$?

(iv) Ergibt sich durch

$$m_1 \dot{\sim} m_2 :\Leftrightarrow f(m_1) \sim f(m_2)$$

eine Äquivalenzrelation auf M? Falls ja, bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $\dot{\sim}$.

Für alle Aufgaben gilt: Begründen Sie jeden Schritt in Ihren Lösungen!

Abgabe in den entsprechenden und gekennzeichneten Abgabekästen im ersten Stock des Mathematischen Institutes (in der Nähe des Bibliothekeingangs).