Mathematisches Institut der LMU | WS 2016/17
Prof. Dr. S. Morozov | Besperechungstermin:
Dr. H. Hogreve | 31.10. bis 4. 11. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielaufgaben für Tutorien, Woche 3

T2.1 Jedes Feld eines Schachbretts wird durch das geordnete Paar (*Linienbuchstabe, Reihennummer*) gekennzeichnet, wobei *Linienbuchstabe* $\in L := \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und *Reihennummer* $\in R := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Im Spiel kann sich ein Turm nur entlang von Zeilen und Spalten bewegen.

(i) Auf einem (ansonsten leeren) Schachbrett habe ein Turm die Ausgangsposition $(\ell_{\mathrm{T}}, r_{\mathrm{T}})$ mit $\ell_{\mathrm{T}} \in L$ und $r_{\mathrm{T}} \in R$. Drücken Sie die Menge aller möglichen Positionen des Turmes nach einem Zug mithilfe von Mengenverknüpfungen aus.

(ii) Der Turm sei jetzt auf dem Feld $(l, r) := (g, 2)$ plaziert. Zudem sei auf dem Brett noch eine Figur auf der Position $(g, 7)$ vorhanden. Der Turm kann diese Figur nicht passieren (falls sie von der gleichen Farbe ist) oder kann sie schlagen (falls sie nicht die gleiche Farbe besitzt). Drücken Sie die Menge aller möglichen Positionen des Turmes nach einem Zug mithilfe der Mengen $L, R, L_g := \{g\}, R_2 := \{2\}$ sowie der Mengen $Z_1 := \{1, 2, 3\}$, $Z_2 := \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $Z_3 := \{3, 7, 8\}$ aus, wenn (a) die beiden Figuren die gleiche Farbe haben und (b) wenn die beiden Figuren verschiedene Farben haben.

T2.2 Sei auf einer nichtleeren Menge M eine Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben. Sei $x \in M$ ein beliebiges Element von M. Sei $y \in M$ ein anderes Element von M, welches zu x äquivalent sei, also $x \sim y$. Aufgrund der Symmetrie von $\sim$ gilt dann auch $y \sim x$. Beides zusammen gibt wegen der Transitivität von $\sim$ dann $x \sim x$. Somit folgt die Reflexivität von $\sim$ aus der Symmetrie und Transitivität von $\sim$ und bräuchte nicht gesondert in der Definition einer Äquivalenzrelation gefordert werden. Stimmt diese Argumentation?

T2.3 Sei $M := \{a, b, c, d, e\}$, wobei die Elemente alle paarweise verschieden seien sollen.

(i) Wird durch $R_1 := \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (c, a)\}$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert?

(ii) Sei $R_2 := R_1 \cup \{(c, d), (d, c)\}$. Wird durch R_2 eine Äquivalenzrelation auf M definiert?

T2.4 Sei M die Menge aller Menschen.

(i) Für $m_1, m_2 \in M$ setzen wir

$$m_1 \sim m_2 :\Leftrightarrow m_1 \text{ hat am gleichen Tag Geburtstag wie } m_2$$

Wird durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert?

(ii) Setzen wir nun für $m_1, m_2 \in M$

$$m_1 \dot{\sim} m_2 :\Leftrightarrow m_1 \text{ ist nicht älter als } m_2$$

Wird durch $\dot{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert?

T2.5 Sei die nichtleere Menge M eine disjunkte Vereinigung von Teilmengen M_j, also $M = \dot{\cup}_{j \in J} M_j$ mit $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $i, j \in J$. Zeigen Sie dass durch

$$m_1 \sim m_2 :\Leftrightarrow \exists j \in J : m_1, m_2 \in M_j$$

eine Äquivalenzrelation auf M gegeben ist, und bestimmen Sie für alle $m \in M$ die Äquivalenzklassen $[m]$.

T2.6 Sei auf der nichtleeren Menge M eine Äquivalenzrelation $\sim$ mit den Äquivalenzklassen $[m]$ gegeben.

(i) Wird durch $f : M \to \{[m] \,|\, m \in M\}$ mit $f(m) := [m]$ eine Abbildung von M in die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$ definert? Ist f surjektiv oder injektiv?

(ii) Sei nun $g : M \to M \times \{[m] \,|\, m \in M\}$ mit $g(m) := (m, [m])$. Ist g eine Abbildung? Ist sie surjektiv oder injektiv?