Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Online am:
02. 11. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 2

2.1 Seien A, B, C Mengen.

(i) Es gilt $x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$ aufgrund der Assoziativität von $\wedge$ (siehe 5. des Lemma 1.12). Des weiteren ist $(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$ und daher $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(ii) Es gelten die Äquivalenzen $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$ da die Distributivät für Aussagen gilt, $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$ (Beweis siehe unten). Weiterhin ist $(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap (A \cup C)$, und somit ist $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cup C)$.

Es bleibt noch zu zeigen dass $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$. Dieses geschieht analog zu (ii) von Aufgabe 1.1 (a) durch Wahrheitstafeln. Der Vergleich von

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$
w	w	w	w	w
w	w	f	f	w
w	f	w	f	w
w	f	f	f	w
f	w	w	w	w
f	w	f	f	f
f	f	w	f	f
f	f	f	f	f

mit

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w
w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f
f	f	w	f	w	f
f	f	f	f	f	f

zeigt die behauptete Äquivalenz.

2.2 Seien A, B, C, D Mengen.

(i) Setzt man beispielsweise $A := \{a\}$, $B := \{b\}$ mit $a \neq b$, dann gilt $B \setminus A = \{b\} \setminus \{a\} = \{b\} = B$ und $B \setminus B = \emptyset \neq \{a\} = A$, so dass die behauptete Gleichheit nicht wahr sein kann.

(ii) Für jede Menge B gilt $(B^c)^c = B$, und wegen der de Morgan Beziehungen $(A \cup B^c)^c = A^c \cap (B^c)^c$, somit $(A \cap B) \cup (A \cup B^c)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c) = B \cap (A \cup A^c)$, wobei für die vorletzte Gleichheit die Symmetrie und für die letzte Gleichheit die Distributivität benutzt wurde. Wegen $A \cup A^c = M$ und $B \cap M = B$ (wobei M ein "Universum" mit $A, B \subset M$ sei) folgt schliesslich die behauptete Gleichheit $(A \cap B) \cup (A \cup B^c)^c = B$.

(iiii) Um die Gleichheit zu widerlegen, wollen wir Mengen wählen, so dass die linke Seite eine nichtleere Menge darstellt, während die rechte Seite zu $\emptyset$ wird. Letzteres ist beispielsweise für eine Wahl mit $A \cap B = \emptyset$ und $C \cap D = \emptyset$ erfüllt. Dieses wird z.B. durch die Wahl $a \neq b$ und $A := C := \{a\}$, $B := D := \{b\}$ erreicht, während dann die Menge auf der linken Seite nicht leer wird, $A \cup (B \cap C) \cup D = \{a\} \cup (\{b\} \cap \{a\}) \cup \{b\} = \{a\} \cup \emptyset \cup \{b\} = \{a, b\} \neq \emptyset$.

(iv) Wir wollen die Behauptung durch einen Widerspruch beweisen. Wir nehmen also an, dass A keine echte Teilmenge von B ist und dass B keine echte Teilmenge von C ist. Wenn A keine echte Teilmenge von C, aber andererseits nach Voraussetzung gilt $A \subset C$, dann muss $A = C$ sein. Ebenso, wenn C keine echte Teilmenge von B ist, aber andererseits nach Voraussetzung gilt $C \subset B$, dann muss $C = B$ sein. Somit wäre dann $A = C = B$, was aber im Widerspruch zur Voraussetzung $A \subsetneq B$ steht. Folglich können unsere Annahmen nicht korrekt sein, also gilt $A \subsetneq C$ oder $C \subsetneq B$.

2.3 Seien A, B, C, D Mengen.

(i) Wir gehen vor wie in Aufgabe 2.2 (ii); mit der gleichen Wahl der Mengen A, B, C, D wie dort erhalten wir für die linke Seite $(A \times C) \cup (B \times D) = (\{a\} \times \{b\}) \cup (\{a\} \times \{b\}) = \{a\} \times \{b\}$, während die rechte Seite zu $(A \cap B) \times (C \cap D) = (\{a\} \cap \{b\}) \times (\{a\} \cap \{b\}) = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$ wird, und somit keine Gleichheit gilt.

(ii) Sei $(a, b) \in (A \setminus C) \times (B \setminus D)$. Also muss $a \in A$, $a \notin C$ und $b \in B$, $b \notin D$ sein. Somit ist $(a, b) \notin A \times D$ und $(a, b) \notin C \times B$, aber $(a, b) \in A \times B$, und folglich $(a, b) \in \big((A \times B) \setminus (C \times B)\big) \setminus (A \times D)$, das heißt, $(A \setminus C) \times (B \setminus D) \subset \big((A \times B) \setminus (C \times B)\big) \setminus (A \times D)$.

Umgekehrt sei nun $(a, b) \in \big((A \times B) \setminus (C \times B)\big) \setminus (A \times D)$. Dann ist $(a, b) \notin A \times D$, also gilt $a \notin A$ oder $b \notin D$. Ebenso ist $(a, b) \notin C \times B$, woraus folgt $a \notin C$ oder $b \notin B$. Des weiteren ist $(a, b) \in A \times B$, so dass $a \in A$ und $b \in B$ sein muss. Aus der Gültigkeit dieser drei Aussagen, d.h., aus $(a \notin A \vee b \notin D) \wedge (a \notin C \vee b \notin B) \wedge (a \in A \wedge b \in B) \Leftrightarrow w$ folgert man [1] dass $a \notin C \wedge b \notin D$, gelten muss. Somit ist also $(a, b) \in (A \setminus C) \times (B \setminus D)$ und daher $\big((A \times B) \setminus (C \times B)\big) \setminus (A \times D) \subset (A \setminus C) \times (B \setminus D)$.

Da, wie im ersten Teil gezeigt, $(A \setminus C) \times (B \setminus D)$ Teilmenge von $\big((A \times B) \setminus (C \times B)\big) \setminus (A \times D)$ ist, und im zweiten Teil die umgekehrte Teilmengenbeziehung bewiesen wird, müssen beide Mengen gleich sein, $(A \setminus C) \times (B \setminus D) = \big((A \times B) \setminus (C \times B)\big) \setminus (A \times D)$.

[1] Sei $\mathcal{A} :\Leftrightarrow a \in A$, $\mathcal{B} :\Leftrightarrow b \in B$, $\mathcal{C} :\Leftrightarrow a \in C$, $\mathcal{D} :\Leftrightarrow b \in D$. Dann gilt wegen der Assoziativität und Symmetrie von $\wedge$ und $\vee$: $w \Leftrightarrow (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{D}) \wedge (\neg\mathcal{C} \vee \neg\mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{D}) \wedge \mathcal{B} \wedge (\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{D} \wedge \mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C}$, wobei $\mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{D}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}) \vee (\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{D})$ und $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} \Leftrightarrow f$ (und Analoges für $\mathcal{B}, \mathcal{C}$) benutzt wurde, sowie die Gültigkeit von $f \vee \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E}$ für jede Aussage $\mathcal{E}$. Folglich muss $\neg\mathcal{D} \wedge \neg\mathcal{C} \Leftrightarrow w$ sein.

(iii) Sei $(a,b) \in A \times D$. Dann ist $a \in A$ und $b \in D$. Da $A \subset B$ und $D \subset C$, ist auch $a \in B$ und $b \in C$. Folglich ist $(a,b) \in B \times C$. Da dieses fuer beliebiges $(a,b) \in A \times D$ gilt, folgt $(A \times D) \subset (B \times C)$.

2.4 Sei $M := \{a,b,c,d\}$ die Teilmenge des Alphabets mit den ersten vier Buchstaben, und

$$m_1 \preceq m_2 :\Leftrightarrow m_1 \text{ kommt nicht später im Alphabet als } m_2.$$

(i) Wir überprüfen: (a) Reflexivität: Es gilt "m_1 kommt nicht später im Alphabet als m_1", und daher $m_1 \preceq m_1$.
(b) Transitivität: Aus "m_1 kommt nicht später im Alphabet als m_2" und "m_2 kommt nicht später im Alphabet als m_3" folgt "m_1 kommt nicht später im Alphabet als m_3", so dass gilt $(m_1 \preceq m_2) \wedge (m_2 \preceq m_3) \Rightarrow m_1 \preceq m_3$.
Antisymmetrie: Aus "m_1 kommt nicht später im Alphabet als m_2" und "m_2 kommt nicht später im Alphabet als m_1" folgert man, dass m_1 und m_2 gleich sein müssen, und somit gilt: $(m_1 \preceq m_2) \wedge (m_2 \preceq m_1) \Rightarrow m_1 = m_2$.

(ii) Sei $m_1, m_2 \in \{a,b,c,d\}$. Dann gibt es nur zwei Möglichkeiten: "m_1 kommt nicht später im Alphabet als m_2" oder "m_2 kommt nicht später im Alphabet als m_1", man kann also jedes m_1 mit jedem m_2 vergleichen. Das heißt, $(m_1 \preceq m_2) \vee (m_2 \preceq m_1) \Leftrightarrow w$, und daher ist $(M, \preceq)$ vollständig geordnet.

Nun sei $N = \{a,b\} \times \{c,d\}$ und

$$(m_1, n_1) \trianglelefteq (m_2, n_2) :\Leftrightarrow (m_1 \preceq m_2) \wedge (n_1 \preceq n_2).$$

(iii) Wir überprüfen: (a) Reflexivität: Es gilt $(m_1, n_1) \trianglelefteq (m_1, n_1) \Leftrightarrow (m_1 \preceq m_1) \wedge (n_1 \preceq n_1)$, und da die Reflexivität für $\preceq$ gilt, ist sie somit auch für $\trianglelefteq$ gültig.
(b) Transitivität: Es ist $\big((m_1, n_1) \trianglelefteq (m_2, n_2)\big) \wedge \big((m_2, n_2) \trianglelefteq (m_3, n_3)\big) \Leftrightarrow m_1 \preceq m_2 \wedge n_1 \preceq n_2 \wedge m_2 \preceq m_3 \wedge n_2 \preceq n_3$. Da die Transitivität für $\preceq$ gilt, folgt $m_1 \preceq m_3$ und $n_1 \preceq n_3$, und somit die Transitivität für $\trianglelefteq$, i.e., $(m_1, n_1) \trianglelefteq (m_3, n_3)$.
Antisymmetrie: Wegen $\big((m_1, n_1) \trianglelefteq (m_2, n_2)\big) \wedge \big((m_2, n_2) \trianglelefteq (m_1, n_1)\big) \Leftrightarrow m_1 \preceq m_2 \wedge n_1 \preceq n_2 \wedge m_2 \preceq m_1 \wedge n_2 \preceq n_1 \Leftrightarrow m_1 \preceq m_2 \wedge m_2 \preceq m_1 \wedge n_1 \preceq$

$n_2 \wedge n_2 \preceq n_1$ und wegen der Antisymmetrie von $\preceq$ können wir schließen, dass $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$ ist. Also gilt $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ und die Antisymmetrie von $\trianglelefteq$.

(iv) Betrachtet werde $(a, d) \in N$ und $(b, c) \in N$. Dann gilt $a \preceq b$, aber nicht $d \preceq c$, also weder $(a, d) \trianglelefteq (b, c)$ noch $(b, c) \trianglelefteq (a, d)$. Somit wird N durch $\trianglelefteq$ nicht vollständig geordnet.