Mathematisches Institut der LMU
Prof. Dr. S. Morozov
Dr. H. Hogreve

WS 2016/17
Version vom:
25. 10. 2016

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielslösungen, Woche 1

1.1 Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen.
(a) Die Wahrheitstafel für $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ lautet:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$
w	w	w	f	f
w	f	w	w	w
f	w	w	w	w
f	f	f	w	f

Somit ist $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ der formale Ausdruck für das sogenannte "exklusive Oder."

(b)

(i) Um die Nichtäquivalenz der Ausdrücke $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ und $\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ festzustellen, reicht es aus, eine "Interpretation" (also eine Ersetzung der Aussagen durch w oder f) zu finden, für welche beide Ausdrücke unterschiedliche Resultate ergeben. Eine solche Interpretation ist beispielsweise gegeben durch $\mathcal{A} :\Leftrightarrow w$ und $\mathcal{B} :\Leftrightarrow f$. Dann wird $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg(w \wedge f) \Leftrightarrow \neg(f) \Leftrightarrow w$, während $\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Leftrightarrow \neg w \wedge \neg f \Leftrightarrow f \wedge w \Leftrightarrow f$.

(ii) Die Wahrheitstafel für $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ lautet

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	f
f	w	f	w	f
f	f	w	w	f
f	f	f	f	f

und die Wahrheitstafel für $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$ berechnet sich zu

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w
w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f
f	w	w	f	f	f
f	w	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f
f	f	f	f	f	f

Da die beiden rechten Spalten dieser Tafeln identisch sind, gilt auch die Äquivalenz $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$.

(iii) Die Wahrheitstafel für $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ wurde bereits oben aufgestellt. Die Wahrheitstafel für $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$ lautet

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	w
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

und deren rechte Spalte weicht dabei schon in der fünften Zeile von dem entsprechenden Resultat der Wahrheitstafel für $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ ab. Somit können die beide entsprechenden Ausdrücke nicht äquivalent sein.

(c)

(i) Es ist $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ wegen der Symmetrie von $\wedge$; wegen $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} \Leftrightarrow f$ (siehe Vorlesung, Bemerkung 1.6.1) gilt $\mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \wedge f \Leftrightarrow f$, wobei die letzte Äquivalenz aus der Tatsache folgt, dass $\wedge$ nur genau dann zu w führt, wenn w und w verknüpft werden.

(ii) Setzt man Klammern zur Verdeutlichung, dann ist $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vee \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{B})$, wobei die oben gezeigte (in Teil (b), Nr. (ii)) Äquivalenz benutzt wurde (mit $\mathcal{C} :\Leftrightarrow \neg\mathcal{B}$). Da des weiteren $\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{B} \Leftrightarrow w$ (vgl. Vorlesung,Bemerkung 1.6.2) und $\mathcal{A} \wedge w \Leftrightarrow \mathcal{A}$ gilt, ergibt sich die Äquivalenz $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vee \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$.

1.2. (a) Mit den Aussagen $\mathcal{A} :\Leftrightarrow$ “Der Hund ist schwarz” und $\mathcal{B} :\Leftrightarrow$ “Die Katze ist grau” erhält man die folgenden Formalisierungen:

(i) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$

(ii) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$

(iiii) $\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$

(b) Mit den Aussagen $\mathcal{A} :\Leftrightarrow$ "Ich bin schuldig" und $\mathcal{B} :\Leftrightarrow$ "Ich muss bestraft werden" wird die Behauptung des Sokrates $\big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \neg\mathcal{A}\big) \Rightarrow \neg\mathcal{B}$. Diese ist jedoch nicht allgemeingültig; sie wird falisifiziert durch die Interpretation $\mathcal{A} :\Leftrightarrow f, \mathcal{B} :\Leftrightarrow w$, denn dann ist $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge \neg\mathcal{A} \Leftrightarrow (f \Rightarrow w) \wedge \neg f \Leftrightarrow (w) \wedge w \Leftrightarrow w$, während $\neg\mathcal{B} \Leftrightarrow \neg w \Leftrightarrow f$ ist. Somit ist obige Behauptung des Sokrates logisch nicht begründbar.

1.3. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ die Aussagen $\mathcal{A} :\Leftrightarrow$"Die linke Tür führt in die Freiheit" und $\mathcal{B} :\Leftrightarrow$"Die rechte Tür führt in die Freiheit." Aufgrund des Wissens von Aladin gilt $\neg\mathcal{A} \Leftrightarrow$"Die linke Tür führt ins Verderben" und $\neg\mathcal{B} \Leftrightarrow$"Die rechte Tür führt ins Verderben." Die Aufschriften der Türen werden formalisiert durch
"Mindestens eine der Türen führt in die Freiheit" $\Leftrightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.
"Die linke Tür führt ins Verderben" $\Leftrightarrow \neg\mathcal{A}$.
Und die Formalisierung des Problems lautet
"Entweder beide Aufschriften sind wahr, oder beide sind falsch" $\Leftrightarrow \big((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A}\big)$. Gesucht ist eine Interpretation, welche diesem Ausdruck $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A}$ den Wahrheitswert w verleiht; eine solche (eindeutig bestimmte, wie man durch eine Wahrheitstabelle überprüfen kann) Interpretation ist durch $\mathcal{A} :\Leftrightarrow f, \mathcal{B} :\Leftrightarrow w$ gegeben, denn dann ist $\big((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A}\big) \Leftrightarrow \big((f \vee w) \Leftrightarrow \neg f\big) \Leftrightarrow \big((w) \Leftrightarrow w\big) \Leftrightarrow w$. Folglich kann Aladin durch die rechte Tür in die Freiheit gelangen.

1.4. Ein Vergleich der Wahrheitstafeln des Schaltelementes S und von Aufgabe 1.1.(a) zeigt, dass S das exklusive Oder $(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \wedge \neg(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2)$ darstellt. In diesem Ausdruck für das exklusive Oder muss noch die Disjunktion $\vee$ durch eine geeignete Kombination von $\wedge$ und $\neg$ ersetzt werden. Dieses geschieht durch Vergleich von

$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

mit folgender Wahrheitstafel

$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_2$	$\neg\mathcal{A}_1$	$\neg\mathcal{A}_2$	$\neg\mathcal{A}_1 \wedge \neg\mathcal{A}_2$	$\neg(\neg\mathcal{A}_1 \wedge \neg\mathcal{A}_2)$
w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	f	w
f	f	w	w	w	f

welches die Äquivalenz $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A}_1 \wedge \neg\mathcal{A}_2)$ impliziert. Dieses eingesetzt in den Ausdruck für das exklusive Oder führt auf die gesuchte Darstellung von S mithilfe von AND- und NOT-Gattern: $\neg(\neg\mathcal{A}_1 \wedge \neg\mathcal{A}_2) \wedge \neg(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2)$.