

Analysis 1 für Informatiker und Statistiker

Beispielaufgaben für Tutorien, Woche 15

T14.1 Sei $a > 0$. Berechnen Sie den Limes:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{x}\right)^x$

(ii) $\lim_{x \downarrow 0} \frac{1 - a^x}{x}$

T14.2 Betrachtet werden Rechtecke mit den Seitenlängen x und y , wobei die Summe aller Seitenlängen jedes Rechtecks gleich $2a$ mit $a > 0$ sei. Finden Sie für jedes gegebene a das Rechteck mit (i) dem grössten und mit (ii) dem kleinsten Flächeninhalt.

T14.3 Seien die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n mal differenzierbar.

(i) Zeigen Sie, dass für die n -te Ableitung des Produktes gilt $(f_1 \cdot f_2)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_1^{(n-k)} f_2^{(k)}$.

(ii) Leiten Sie das Binomialtheorem her, indem Sie das Ergebnis aus Teil (i) und eine spezielle Wahl von Funktionen f_1, f_2 benutzen.

(iii) Berechnen Sie die 2017-te Ableitung von $x^2 e^x$.

T14.4 Sei $a \in (0, 1]$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \geq 0$ die Ungleichung $(x + y)^a \leq x^a + y^a$ gilt.

T14.5 Untersuchen Sie die Stetigkeit der ersten Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

T14.6 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := (2x - 1)^3 + 1$. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} an allen Stellen, an welchen die Ableitung der Umkehrfunktion existiert.

T14.7 Sei $\mathcal{D} = [0, 1]$ und $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, welche für alle $x \in \mathcal{D}$ die Ungleichungen $f(x) \geq 0$ und $f'(x) \leq f(x)$ erfüllt. Zeigen Sie, dass aus $f(0) = 0$ dann folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}$.